Structures complexes symétriques et anti-symétriques

Atelier sur la géométrie différentielle et l'analyse globale

Giovanni Bazzoni, Università degli Studi dell'Insubria
Travaux en commun avec: M. Freibert, A. Gil García, A. Latorre, B. Meinke

le 26 mai 2021

But de cet exposé

Dans cet exposé nous allons étudier des conditions de compatibilité entre une forme symplectique et une structure complexe. On verra de quelle manière ces structures peuvent interagir et quelles autres structures géométriques apparaîssent.

Plan de l'exposé

1. Structures complexes symétriques
2. Structures en algèbres et groupes de Lie
3. Structures complexes anti-symétriques
4. Combinaison de structures symétrique et anti-symétriques

Contenu

Structures complexes symplectiques

Définition

Une *structure complexe symplectique* sur une variété complexe (M, J) est $\sigma \in \Omega^{2,0}(M)$ non-dégénérée et telle que $d\sigma = 0$.

- Le rang de $T^{(1,0)}M$ est pair $\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} M = 2n$
- σ^n est une section nulle en aucun point de $\mathcal{K}_M$

Examples

- Le fibré cotangent T^*M de toute variété complexe (M, J) possède une structure complexe symplectique canonique
- Si G est un groupe de Lie complexe, ses orbites coadjointes admettent une structure complexe symplectique
- Si M admet une structure hyperkähler $(\sigma_I, \sigma_J, \sigma_K)$, alors $(I, \sigma_J + i\sigma_K)$ est une structure complexe symplectique

Structures complexes symétriques

Sur une variété complexe (M, J), l'ensemble des structures complexes symplectiques est bijectif à l'ensemble

$$\{\omega \text{ symplectique } \mid \omega(JX, Y) = \omega(X, JY) \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M)\}$$

Définition

Soit (M, J) une variété complexe et soit ω une forme symplectique sur M. On dit que J est *symétrique* par rapport à ω si

$$\omega(JX, Y) = \omega(X, JY) \qquad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Une structure complexe symplectique sur (M, J) est équivalente à un couple (J, ω) tel que J est symétrique par rapport à ω.

Structures géométriques et G-structures

Plusieurs structures géométriques peuvent être décrites comme *G-structures*, c'est-à-dire réductions du groupe de structure du fibré des répères de M^n à un sous-groupe $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, avec une notion d'integrabilité. Si $G = \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$,

- $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-structure $\Leftrightarrow$ structure (presque) complexe
- $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$-structure $\Leftrightarrow$ structure (presque) symplectique
- $\mathrm{O}(2n)$-structure $\Leftrightarrow$ structure riemannienne

De plus,

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \cap \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) = \mathrm{O}(2n) \cap \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) = \mathrm{O}(2n) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \mathrm{U}(n)$$

Cela justifie la devise

> *la géométrie Kähler se trouve à l'intersection de la géométrie complexe, symplectique et riemannienne.*

Quelques sous-groupes de $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$

En dimension complexe pair, on considère des sous-groupes de $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C}) &= \{A \mid A^t J_0 A = J_0\} \\ \mathrm{U}(2n) &= \{A \mid \bar{A}^t A = \mathrm{Id}\} \\ \mathrm{GL}(n, \mathbb{H}) &= \{A \mid A J_0 = J_0 \bar{A}\} \end{aligned} \qquad \text{où} \quad J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}$$

- $\mathrm{U}(2n) \cap \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C}) = \mathrm{U}(2n) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{H}) = \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$
- ces intersections définissent $\mathrm{Sp}(n)$

- $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$-structure integrable $\Leftrightarrow$ structure complexe symplectique
- $\mathrm{U}(2n)$-structure integrable $\Leftrightarrow$ structure *Kähler*
- $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$-structure integrable $\Leftrightarrow$ structure *hypercomplexe*
- $\mathrm{Sp}(n)$-structure integrable $\Leftrightarrow$ structure *hyperkähler*

Quelques définitions

Définition

Une *structure Kähler* sur M^{2n} est la donnée d'une structure riemanniennne g et d'une structure complexe compatible J telles que la 2-forme $\sigma(\cdot,\cdot) = g(\cdot, J\cdot)$ est fermée $\Leftrightarrow \mathrm{Hol}(g) \subset \mathrm{U}(n)$.

Définition

Une *structure hypercomplexe* sur M^{4n} est la donnée de deux structures complexes I et J telles que $K := IJ = -JI$.

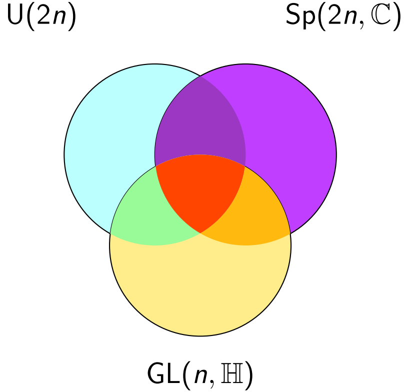
Définition

Une *structure hyperkähler* sur M^{4n} est une métrique de Riemann g qui est Kähler par rapport à 3 structures complexes qui anti-commutent $(I, J, K) \rightsquigarrow (\sigma_I, \sigma_J, \sigma_K) \Leftrightarrow \mathrm{Hol}(g) \subset \mathrm{Sp}(n)$.

Pour fixer les idées

Si on essaye d'imiter la devise de tout à l'heure, on pourrait dire que

La géométrie hyperkähler se trouve à l'intersetion de la géométrie Kähler, complexe symplectique et hypercomplexe



Contenu

Comment obtenir des examples ?

Notre but est obtenir beaucoup d'exemples de structures complexe symplectiques. Pour faire ça :

- on étudie ces structures sur les algèbres de Lie, notamment nilpotentes et résolubles
- on obtient des structures invariantes à gauche sur les groupes de Lie correspondants
- en certains cas, on peut obtenir des variétés compactes en prenant le quotient du groupe par un certain sous-groupe. Une condition nécéssaire pour que cela arrive est que l'algèbre de Lie soit *unimodulaire* : $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

Notation

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie avec une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, alors $\{e^1, \ldots, e^n\}$ est la base duale et $e^{ij} := e^i \wedge e^j$ en $\Lambda^2\mathfrak{g}^*$.

Structures complexes symplectiques en algèbres de Lie

Définition

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle de dimension $2n$.

- Une *structure complexe* est $J \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ tel que $J^2 = -\mathrm{Id}$ et $N_J = 0$
- Une *structure symplectique* est $\omega \in \Lambda^2\mathfrak{g}^*$ avec $d\omega = 0$ et $\omega^n \neq 0$
- Une *structure complexe symplectique* est un couple (J, ω) tel que J est symétrique par rapport à ω :

$$\omega(JX, Y) = \omega(X, JY) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

- La dimension complexe d'une algèbre de Lie munie d'une structure complexe symplectique est pair.

Algèbres de Lie nilpotentes et résolubles

La *suite centrale ascendante* d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est définie par

$$\mathfrak{g}_0 \coloneqq \{0\}, \quad \mathfrak{g}_k \coloneqq \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}_{k-1}\}, k \geq 1 \, .$$

- $\mathfrak{g}_k \subset \mathfrak{g}_{k+1}$ et tout $\mathfrak{g}_k$ est un idéal
- $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$

Définition

On dit que une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est *nilpotente* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$. Dans ce cas, le *pas de nilpotence* de $\mathfrak{g}$ est le plus petit m tel que $\mathfrak{g}_m = \mathfrak{g}$.

- On va écrire ALN au lieu de algèbre de Lie nilpotente

Définition

On dit que une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est *résoluble* si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est nilpotente.

Algèbres de Lie complexes symplectiques en dimension 4

Proposition [B-Freibert-Latorre-Meinke] et [B-Gil García-Latorre]

$(\mathfrak{g}, J, \omega)$ est isomorphe à :

$\mathfrak{g}$	J	ω
$\mathbb{R}^4$	$e_2 \mapsto e_1,\ e_4 \mapsto e_3$	$e^{14} + e^{23}$
$\mathfrak{rh}_3$	$e_2 \mapsto e_1,\ e_4 \mapsto e_3$	$e^{14} + e^{23}$
$\mathfrak{r}'_2$	$e_1 \mapsto e_2,\ e_3 \mapsto e_4$	$e^{13} - e^{24}$
$\mathfrak{r}_{4,-1,-1}$	$e_4 \mapsto e_1,\ e_2 \mapsto e_3$	$e^{12} - e^{34}$
$\mathfrak{d}_{4,2}$	$e_1 \mapsto e_3,\ e_2 \mapsto e_4$	$a(e^{12} - e^{34}) + b(e^{14} - e^{23})^\dagger$

† $[a : b] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$.

Réduction complexe symplectique

Soit $(\mathfrak{g}, \omega)$ une algèbre de Lie symplectique. Un idéal $\mathfrak{a}$ est *isotrope* si $\omega(X, Y) = 0$ pour $X, Y \in \mathfrak{a}$. Alors ω induit une structure symplectique $\bar{\omega}$ en $\bar{\mathfrak{g}} := \mathfrak{a}^{\perp_\omega}/\mathfrak{a}$. On appelle $(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\omega})$ la *réduction symplectique* de $(\mathfrak{g}, \omega)$ par rapport à $\mathfrak{a}$.

Proposition [B-Freibert-Latorre-Meinke]

Soit $(\mathfrak{g}, J, \omega)$ une algèbre de Lie complexe symplectique et soit $\mathfrak{a}$ un idéal isotrope et J-invariant. Alors (J, ω) induit une structure complexe symplectique $(\bar{J}, \bar{\omega})$ en $\bar{\mathfrak{g}} := \mathfrak{a}^{\perp_\omega}/\mathfrak{a}$.

Définition

$(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{J}, \bar{\omega})$ est la *réduction complexe symplectique* de $(\mathfrak{g}, J, \omega)$ par rapport à $\mathfrak{a}$.

Oxidation complexe symplectique

Proposition [B-Freibert-Latorre-Meinke]

1. En partant d'une algèbre de Lie complexe symplectique $(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{J}, \bar{\omega})$ de dimension $4n$ et quelques *données d'oxidation*, l'*oxidation complexe symplectique* produit une algèbre de Lie complexe symplectique $(\mathfrak{g}, J, \omega)$ de dimension $4n+4$.
2. Par construction, l'oxidation $(\mathfrak{g}, J, \omega)$ contient un idéal 2-dimensional isotrope et J-invariant $\mathfrak{a}$ tel que la réduction de $(\mathfrak{g}, J, \omega)$ par rapport à $\mathfrak{a}$ est isomorphe à $(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{J}, \bar{\omega})$.

$$\begin{tikzcd}
(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{J}, \bar{\omega}) + \text{données} \arrow[rr, bend left, "\text{oxidation}"] & & (\mathfrak{g}, J, \omega) + \mathfrak{a} \arrow[ll, bend left, "\text{réduction}"]
\end{tikzcd}$$

Structures complexes en ALN

- Soit $\mathfrak{g}$ une ALN munie d'une structure complexe J. A priori, il n'y a pas de compatibilité entre J et la suite centrale ascendante $\{\mathfrak{g}_k\}$ de $\mathfrak{g}$; c'est-à-dire, les idéaux $\mathfrak{g}_k$ ne sont pás forcément J-invariants.

Définition

Soit $\mathfrak{g}$ une ALN munie d'une structure complexe J. Sa *suite centrale ascendante adaptée* est définie par $\mathfrak{g}_0(J) := \{0\}$ et

$$\mathfrak{g}_k(J) := \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}_{k-1}(J), [JX, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}_{k-1}(J)\}, k \geq 1\,.$$

- $\mathfrak{g}_1(J)$ est le plus grand sous-espace J-invariant contenu en $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Types de structures complexes en ALN

Définition [Cordero-Fernández-Gray-Ugarte, Latorre-Ugarte-Villacampa]

Soit $\mathfrak{g}$ une ALN munie d'une structure complexe J. J est

- *quasi-nilpotente* si $\mathfrak{g}_1(J) \neq 0$
  - *nilpotente* si $\exists\ p \mid \mathfrak{g}_p(J) = \mathfrak{g}$
  - *faiblement non-nilpotente* si $\exists\ p \mid \mathfrak{g}_q(J) = \mathfrak{g}_p(J) \neq \mathfrak{g}\ \forall q \geq p$
- *fortement non-nilpotente (FnN)* si $\mathfrak{g}_1(J) = 0$

• Si $\mathfrak{g}$ est une ALN munie d'une structure complexe quasi-nilpotente J, $(\mathfrak{g}, J)$ est *extension complexe* d'une paire $(\hat{\mathfrak{g}}, \hat{J})$, où $\hat{\mathfrak{g}}$ est une ALN de dimension inférieure munie d'une structure complexe $\hat{J}$.

• Les structures complexes de type fortement non-nilpotente sont "nouvelles" en chaque dimension.

Structures complexes symplectiques avec J FnN

Théorème [B-Freibert-Latorre-Meinke]

Soit $\mathfrak{g}$ une ALN de dimension 8 munie d'une structure complexe J FnN. Alors $(\mathfrak{g}, J)$ n'admet aucune structure complexe symplectique.

Notre preuve se base sur un résultat de classification de ALN de dimension 8 munies de structures complexes FnN par Latorre-Ugarte-Villacampa.

- Est-ce qu'on peut démontrer ce résultat directement ?
- Est-ce spécifique de la dimension 8 ?

Réduction de ALN de dimension 8

Proposition [B-Freibert-Latorre-Meinke]

Toute ALN complexe symplectique de dimension 8 peut être réduite à une ALN complexe symplectique de dimension 4.

Preuve

La réduction d'une ALN complexe symplectique est nilpotente. Si $(\mathfrak{g}, J, \omega)$ est une ALN complexe symplectique de dimension 8, alors J est quasi-nilpotente. Si on choisit $X \in \mathfrak{g}_1(J)$, alors $JX \in \mathfrak{g}_1(J)$. Par conséquent,

$$\omega(X, JX) = \omega(JX, X) = -\omega(X, JX) \Rightarrow \omega(X, JX) = 0\,,$$

donc $\{X, JX\}$ est un idéal isotrope J-invariant.

Oxidation de ALN

- Si $(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{J}, \bar{\omega})$ est une ALN munie d'une structure complexe symplectique, et on choisit les données d'oxidation afin que $\mathfrak{g}$ soit nilpotente, alors J est quasi-nilpotente.
- Toute ALN complexe symplectique $(\mathfrak{g}, J, \omega)$ de dimension $4n+4$ avec J quasi-nilpotente est l'oxidation complexe symplectique d'une ALN complexe symplectique appropriée $(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{J}, \bar{\omega})$ de dimension $4n$.

Théorème [B-Freibert-Latorre-Meinke]

Toute ALN complexe symplectique de dimension 8 peut être obtenue en oxidant, de façon convenable, une ALN complexe symplectique de dimension 4.

ALN complexes symplectiques en dimension 8

On détermine toutes les possible données d'oxidation des ALN complexes symplectique de dimension 4, $\mathbb{R}^4$ et $\mathfrak{rh}_3$. Par conséquent, on obtient toutes les ALN complexes symplectique de dimension 8.

Proposition [B-Freibert-Latorre-Meinke]

Le pas de nilpotence d'une ALN complexe symplectique en dimension 8 est au plus 4.

- Qu'est-ce qu'il se passe en dimension supérieure ? Est-ce que le pas de nilpotence admet une borne ?
- Il existe des ALN symplectiques et complexes de dimension 8 avec pas de nilpotence ≥ 5
- Dotti et Fino ont montré que le pas de nilpotence d'une ALN de dimension 8 munie d'une structure hypercomplexe et au plus 2
- Une ALN munie d'une structure Kähler est abélienne

Nilvariétés

Définition

Un groupe de Lie connexe et simplement connexe est *nilpotente* si son algèbre de Lie l'est.

- Tout groupe de Lie connexe, simplement connexe et nilpotente est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$

Définition

Une *nilvariété* $\Gamma\backslash G$ est le quotient d'un groupe de Lie connexe, simplement connexe et nilpotente G par un réseau uniforme $\Gamma \subset G$.

- Toute ALN nilpotente est unimodulaire. Un groupe de Lie connexe, simplement connexe et nilpotente G admet un réseau uniforme $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ admet une *structure rationale*, c'est-à-dire $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ (Mal'cev)

Topologie et géométrie des nilvariétés

Soit $N = \Gamma\backslash G$ une nilvariété. Alors $\pi\colon G \to N$ est le revêtement universel, donc N est un espace asphérique et $\pi_1(N) \cong \Gamma$

Tout tenseur défini sur $\mathfrak{g} = T_e G$ donne un tenseur invariant à gauche sur G et, par conséquent, un tenseur sur N. En appliquant ça aux formes différentielles, on obtient une inclusion de complexes de co-chaînes $(\Lambda^\bullet \mathfrak{g}^*, d) \hookrightarrow (\Omega^\bullet(N), d)$.

Théorème [Nomizu, 1958]

$(\Lambda^\bullet \mathfrak{g}^*, d) \hookrightarrow (\Omega^\bullet(N), d)$ induit un isomorphisme en cohomologie.

Nilvariétés complexes symplectiques en dimension 8

On considère des structures géométriques sur une nilvariété, définies par des tenseurs invariants à gauche. On appelle ce type de structures *invariantes à gauche*.

Une ALN complexe symplectique $(\mathfrak{g}, J, \omega)$ détermine une structure complexe symplectique invariante à gauche sur G. Si G admet un réseau uniforme Γ, on obtient une structure complexe symplectique invariante à gauche sur la nilvariété $\Gamma\backslash G$.

Théorème [B-Freibert-Latorre-Meinke]

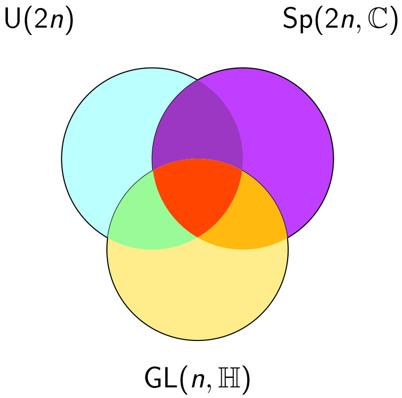
Il y a *beaucoup* de nilvariétés complexes symplectiques. Aucune d'elle n'admet un métrique hyperkähler.

Théorème [Benson-Gordon, 1988 & Hasegawa, 1989]

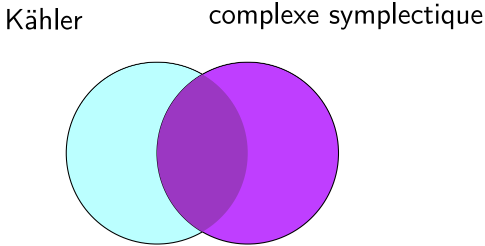
Une nilvariété munie d'une structure Kähler, non nécessairement invariante à gauche, est difféomorphe à un tore.

Une application

On rappelle le diagramme qu'on a vu tout à l'heure :



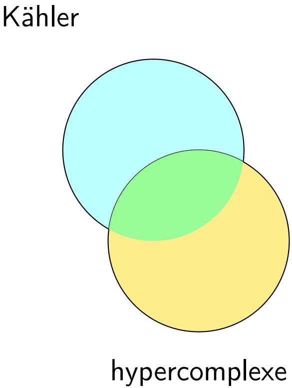
Structures complexes symplectique et Kähler



Théorème [Beauville, 1983]

Soit (M^{4n}, J, ω) une variété complexe symplectique compacte. Supposons que (M, J) admette une métrique Kähler compatible g. Alors l'holonomie de g es contenue dans $\mathrm{Sp}(n)$.

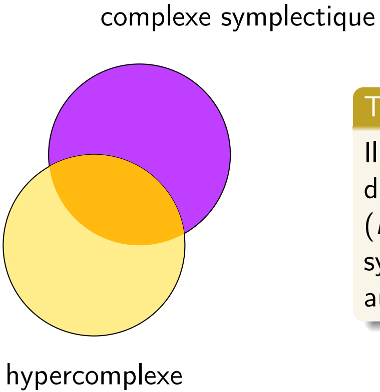
Structures hypercomplexes et Kähler



Theorem [Verbitsky, 2005]

Soit (M^{4n}, I, J, K) une variété hypercomplexe compacte. Supposons que (M, I) admette une métrique Kähler compatible g. Alors l'holonomie de g es contenue dans $\mathrm{Sp}(n)$.

Structures complexes symplectique et hypercomplexes



Théorème [B-Freibert-Latorre-Meinke]

Il existe une (nil)variété M munie d'une structure hypercomplexe (I, J, K) et d'une structure complexe symplectique (J, ω) qui n'admet aucune structure hyperkähler.

Contenu

Structures pseudo-Kähler

Définition

Une *structure pseudo-Kähler* sur une variété complexe (M, J) est $\omega \in \Omega^{1,1}(M)$ non dégénérée et telle que $d\omega = 0$.

$g(X, Y) := \omega(X, JY)$ est un tenseur symétrique non dégénéré, donc une métrique pseudo-riemannienne. La géométrie pseudo-Kähler inclut alors la géométrie Kähler, quand J est dominée par ω.

Définition

Soit (M, J) une variété complexe et soit ω une forme symplectique sur M. On dit que J est *anti-symétrique* par rapport à ω si

$$\omega(JX, Y) = -\omega(X, JY) \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Une structure pseudo-Kähler sur (M, J) est équivalente à un couple (J, ω) tel que J est anti-symétrique par rapport à ω.

Contenu

Structures hypersymplectiques

On considère une structure géométrique qui est contenue dans le contexte symétrique autant que anti-symétrique.

Definition

Une *structure hypersymplectique* sur M^{4n} est la donnée d'une structure complexe J, d'une structure produit E et d'une métrique g telles que

- $EJ = -JE$
- la signature de g est $(2n, 2n)$
- $g(X, Y) = g(JX, JY) = -g(EX, EY)\ \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

L'holonomie d'une métrique hypersymplectique est contenue dans $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$; le premier est une des formes réelles du deuxième, l'autre étant $\mathrm{Sp}(n)$. Ces métrique furent introduites par Hitchin ; elles sont Ricci plates et Calabi-Yau.

Rélations avec d'autres structures

Si (J, E, g) est une structure hypersymplectique sur M, on pose

- $\omega_{pk}(X, Y) = g(JX, Y)$
- $\omega_{cs}(X, Y) = g(JEX, Y), \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

Alors

- $\omega_{pk}, \omega_{cs} \in \Omega^2(M)$ sont fermées et non-dégénérées
- J est anti-symétrique par rapport à ω_{pk}
- J est symétrique par rapport à ω_{cs}

Une variété hypersymplectique est, d'une façon naturelle, une variété pseudo-Kähler et complexe symplectique

Une construction

Supposons donnée une variété complexe (M, J) munie de deux 2-formes fermées et non dégénérées ω_{pK}, ω_{cs} de façon que

- J est anti-symétrique par rapport à ω_{pK}
- J est symétrique par rapport à ω_{cs}

Soit g la métrique pseudo-Kähler de (J, ω_{pk}). On note E la composition

$$TM \xrightarrow{\omega_{cs}} T^*M \xrightarrow{\omega_{pK}^{-1}} TM$$

Théorème [B-Gil García-Latorre]

Si $E^2 = \mathrm{Id}$, alors (J, E, g) est une structure hypersymplectique.

Application I

On applique ce théorème à la construction d'exemples de variétés admettant ou pas des structures hypersymplectiques. Il s'agit de nil-variétés, munies de structures géométriques invariantes à gauche.

Théorème [B-Gil García-Latorre]

1. Il existe une variété M^8, munie de structures complexes J_1 et J_2, telles que
   - (M, J_1) admet une métrique hypersymplectique
   - (M, J_2) n'est ni symétrique ni anti-symétrique par rapport à aucune forme symplectique
2. Il existe une variété complexe (N^8, J) avec J symétrique et anti-symétrique par rapport à certaines formes symplectiques, n'admettant pourtant aucune structure hypersymplectique.

Application II

Tous les exemples connus de nilvariétés $\Gamma\backslash G$ munies d'une structure hypersymplectique ont $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ avec pas de nilpotence 3.
Nous obtenons deux familles à un paramètre de métriques hypersymplectiques sure une nilvariété $N = \Lambda\backslash H$ où $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$ a pas de nilpotence 4. En dimension 8, c'est le pas de nilpotence maximal.

Théorème [B-Gil García-Latorre]

Pour tout $n \geq 2$ il existe un nilvariété $\Lambda\backslash H$ de dimension $4n$, où $\mathfrak{h}$ as pas de nilpotence 4, qui admet deux familles de structures hypersymplectiques non equivalentes $(J_c, \widehat{E}, \widehat{g})$ et (J_c, E, g), indexées par un paramètre $c > 0$, telles que $\widehat{g}$ est plate et complète, et g est non-plate et complète.

Merci pour votre attention !

G. Bazzoni, A. Gil García, A. Latorre,
Symmetric and skew-symmetric complex structures,
arXiv :2101.11953.

G. Bazzoni, M. Freibert, A. Latorre, B. Meinke,
Complex symplectic structures on Lie algebras,
J. Pure Appl. Algebra **225** (2021), no. 6.