

Métriques d'Einstein,
Courbure de Weyl, &
Involutions Antiholomorphes

Claude LeBrun
Stony Brook University

La Géométrie Différentielle et l'Analyse Globale.
CRM, Montréal, Québec. 26 mai, 2021.

Références Principales:

Références Principales:

Einstein Manifolds, Self-Dual Weyl Curvature,
and Conformally Kähler Geometry

Références Principales:

Einstein Manifolds, Self-Dual Weyl Curvature,
and Conformally Kähler Geometry

Mathematical Research Letters

Références Principales:

Einstein Manifolds, Self-Dual Weyl Curvature,
and Conformally Kähler Geometry

Mathematical Research Letters

(2021) doi 10.4310/MRL.2021.v28.n1.a6

Références Principales:

Einstein Manifolds, Self-Dual Weyl Curvature,
and Conformally Kähler Geometry

Mathematical Research Letters

(2021) doi 10.4310/MRL.2021.v28.n1.a6

e-print arXiv:1908.01881 [math.DG]

Références Principales:

Références Principales:

Einstein Manifolds, Conformal Curvature, and
Anti-Holomorphic Involutions

Références Principales:

Einstein Manifolds, Conformal Curvature, and
Anti-Holomorphic Involutions

Annales Mathématiques du Québec
(2021) doi [10.1007/s40316-020-00154-2](https://doi.org/10.1007/s40316-020-00154-2)

Références Principales:

Einstein Manifolds, Conformal Curvature, and
Anti-Holomorphic Involutions

Annales Mathématiques du Québec
(2021) doi 10.1007/s40316-020-00154-2

e-print arXiv:2007.01180 [math.DG]

Definition. *Une métrique riemannienne h*

Definition. Une métrique riemannienne h
est dite d'Einstein

Definition. Une métrique riemannienne h est dite d'Einstein si sa courbure de Ricci est constante

Definition. Une métrique riemannienne h est dite d'Einstein si sa courbure de Ricci est constante — c'est à dire, si

$$r = \lambda h$$

Definition. Une métrique riemannienne h est dite d'Einstein si sa courbure de Ricci est constante — c'est à dire, si

$$r = \lambda h$$

pour une constante $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definition. Une métrique riemannienne h est dite d'Einstein si sa courbure de Ricci est constante — c'est à dire, si

$$r = \lambda h$$

pour une constante $\lambda \in \mathbb{R}$.

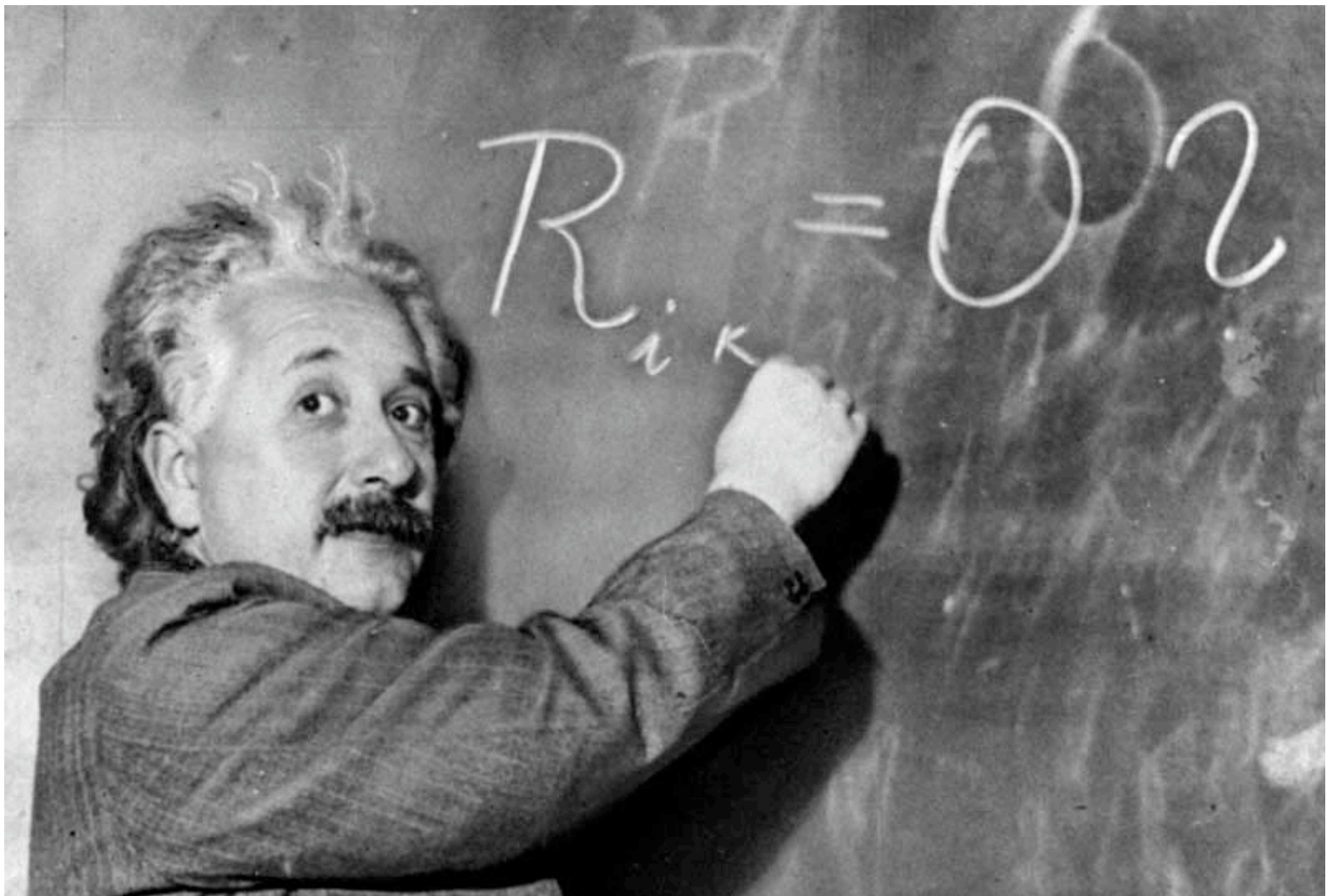
“...la plus grande bêtise de ma vie!”

— A. Einstein, à G. Gamow

Definition. Une métrique riemannienne h est dite d'Einstein si sa courbure de Ricci est constante — c'est à dire, si

$$r = \lambda h$$

pour une constante $\lambda \in \mathbb{R}$.



Definition. Une métrique riemannienne h est dite d'Einstein si sa courbure de Ricci est constante — c'est à dire, si

$$r = \lambda h$$

pour une constante $\lambda \in \mathbb{R}$.

Donc, afin de le punir ...

Definition. Une métrique riemannienne h est dite d'Einstein si sa courbure de Ricci est constante — c'est à dire, si

$$r = \lambda h$$

pour une constante $\lambda \in \mathbb{R}$.

On appelle λ la constante d'Einstein.

Definition. Une métrique riemannienne h est dite d'Einstein si sa courbure de Ricci est constante — c'est à dire, si

$$r = \lambda h$$

pour une constante $\lambda \in \mathbb{R}$.

On appelle λ la constante d'Einstein.

Elle est du même signe que la courbure scalaire

Definition. Une métrique riemannienne h est dite d'Einstein si sa courbure de Ricci est constante — c'est à dire, si

$$r = \lambda h$$

pour une constante $\lambda \in \mathbb{R}$.

On appelle λ la constante d'Einstein.

Elle est du même signe que la courbure scalaire

$$s = r_j^j = \mathcal{R}^{ij}_{ij}.$$

Le Problème de Reconnaissance:

Le Problème de Reconnaissance:

Si M^n admet une métrique d'Einstein h ,

Le Problème de Reconnaissance:

Si M^n admet une métrique d'Einstein h ,

est-ce-que cela nous aide à reconnaître M ?

Le Problème de Reconnaissance:

Si M^n admet une métrique d'Einstein h ,

est-ce-que cela nous aide à reconnaître M ?

Qu'apprenons-nous de la géométrie de h ?

Le Problème de Reconnaissance:

Si M^n admet une métrique d'Einstein h ,

est-ce-que cela nous aide à reconnaître M ?

Qu'apprenons-nous de la géométrie de h ?

Si $n = 3$, sa courbure sectionnelle est constante!

Le Problème de Reconnaissance:

Si M^n admet une métrique d'Einstein h ,

est-ce-que cela nous aide à reconnaître M ?

Qu'apprenons-nous de la géométrie de h ?

Si $n = 3$, sa courbure sectionnelle est constante!

Le revêtement universel \widetilde{M} est alors $S^3, \mathbb{R}^3, \mathcal{H}^3 \dots$

Le Problème de Reconnaissance:

Si M^n admet une métrique d'Einstein h ,

est-ce-que cela nous aide à reconnaître M ?

Qu'apprenons-nous de la géométrie de h ?

Si $n = 3$, sa courbure sectionnelle est constante!

Le revêtement universel \widetilde{M} est alors $S^3, \mathbb{R}^3, \mathcal{H}^3 \dots$

Mais lorsque $n \geq 5$, la situation semble désespérée.

Le Problème de Reconnaissance:

Si M^n admet une métrique d'Einstein h ,

est-ce-que cela nous aide à reconnaître M ?

Qu'apprenons-nous de la géométrie de h ?

Si $n = 3$, sa courbure sectionnelle est constante!

Le revêtement universel \widetilde{M} est alors $S^3, \mathbb{R}^3, \mathcal{H}^3 \dots$

Mais lorsque $n \geq 5$, la situation semble désespérée.

$\{\text{métriques d'Einstein sur } S^n\} / \sim$ n'est pas connexe!

Le Problème de Reconnaissance:

Si M^n admet une métrique d'Einstein h ,

est-ce-que cela nous aide à reconnaître M ?

Qu'apprenons-nous de la géométrie de h ?

Si $n = 3$, sa courbure sectionnelle est constante!

Le revêtement universel \widetilde{M} est alors $S^3, \mathbb{R}^3, \mathcal{H}^3 \dots$

Mais lorsque $n \geq 5$, la situation semble désespérée.

$\{\text{métriques d'Einstein sur } S^n\} / \sim$ n'est pas connexe!

Pour $n = 4$, la situation est plus encourageante...

L'Espace de Modules des Métriques d'Einstein

L'Espace de Modules des Métriques d'Einstein

$$\mathcal{E}(M) = \{\text{métriques d'Einstein } h\} / (\text{Difféos} \times \mathbb{R}^+)$$

L'Espace de Modules des Métriques d'Einstein

$$\mathcal{E}(M) = \{\text{métriques d'Einstein } h\} / (\text{Difféos} \times \mathbb{R}^+)$$

Connexe pour certaines variétés de dimension 4:

L'Espace de Modules des Métriques d'Einstein

$$\mathcal{E}(M) = \{\text{métriques d'Einstein } h\} / (\text{Difféos} \times \mathbb{R}^+)$$

Connexe pour certaines variétés de dimension 4:

$$M =$$

L'Espace de Modules des Métriques d'Einstein

$$\mathcal{E}(M) = \{\text{métriques d'Einstein } h\} / (\text{Difféos} \times \mathbb{R}^+)$$

Connexe pour certaines variétés de dimension 4:

$$M = T^4,$$

Berger,

L'Espace de Modules des Métriques d'Einstein

$$\mathcal{E}(M) = \{\text{métriques d'Einstein } h\} / (\text{Difféos} \times \mathbb{R}^+)$$

Connexe pour certaines variétés de dimension 4:

$$M = T^4, \quad K3,$$

Berger, Hitchin,

L'Espace de Modules des Métriques d'Einstein

$$\mathcal{E}(M) = \{\text{métriques d'Einstein } h\} / (\text{Difféos} \times \mathbb{R}^+)$$

Connexe pour certaines variétés de dimension 4:

$$M = T^4, \quad K3, \quad \mathcal{H}^4/\Gamma,$$

Berger, Hitchin, Besson-Courtois-Gallot,

L'Espace de Modules des Métriques d'Einstein

$$\mathcal{E}(M) = \{\text{métriques d'Einstein } h\} / (\text{Difféos} \times \mathbb{R}^+)$$

Connexe pour certaines variétés de dimension 4:

$$M = T^4, \quad K3, \quad \mathcal{H}^4/\Gamma, \quad \mathbb{C}\mathcal{H}_2/\Gamma.$$

Berger, Hitchin, Besson-Courtois-Gallot, L.

L'Espace de Modules des Métriques d'Einstein

$$\mathcal{E}(M) = \{\text{métriques d'Einstein } h\} / (\text{Difféos} \times \mathbb{R}^+)$$

Connexe pour certaines variétés de dimension 4:

$$M = T^4, \quad K3, \quad \mathcal{H}^4/\Gamma, \quad \mathbb{C}\mathcal{H}_2/\Gamma.$$

Berger, Hitchin, Besson-Courtois-Gallot, L.

Reliés à plusieurs résultats de non-existence:

L'Espace de Modules des Métriques d'Einstein

$$\mathcal{E}(M) = \{\text{métriques d'Einstein } h\} / (\text{Difféos} \times \mathbb{R}^+)$$

Connexe pour certaines variétés de dimension 4:

$$M = T^4, \quad K3, \quad \mathcal{H}^4/\Gamma, \quad \mathbb{C}\mathcal{H}_2/\Gamma.$$

Berger, Hitchin, Besson-Courtois-Gallot, L.

Reliés à plusieurs résultats de **non-existence**:

Beaucoup de M^4 n'admettent aucune métrique d'Einstein!

L'Espace de Modules des Métriques d'Einstein

$$\mathcal{E}(M) = \{\text{métriques d'Einstein } h\} / (\text{Difféos} \times \mathbb{R}^+)$$

Connexe pour certaines variétés de dimension 4:

$$M = T^4, \quad K3, \quad \mathcal{H}^4/\Gamma, \quad \mathbb{C}\mathcal{H}_2/\Gamma.$$

Berger, Hitchin, Besson-Courtois-Gallot, L.

Reliés à plusieurs résultats de **non-existence**:

Beaucoup de M^4 n'admettent aucune métrique d'Einstein!

Même plus extrême si on demande que $\lambda \geq 0 \dots$

Théorème (L '09).

Théorème (L '09). *Soit M une variété compacte lisse de dimension 4*

Théorème (L '09). *Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω .*

Théorème (L '09). *Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω . Alors, M admet également une métrique d'Einstein h*

Théorème (L '09). Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω . Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$

Théorème (L '09). Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω . Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si

Théorème (L '09). Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω . Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si

$M \stackrel{\text{diff}}{\approx}$ {

Théorème (L '09). Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω . Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}P_2 \# k \overline{\mathbb{C}P}_2, \end{array} \right.$$

Théorème (L '09). Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω . Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}\mathbb{P}_2 \#^k \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}_2}, \quad 0 \leq k \leq 8, \end{array} \right.$$

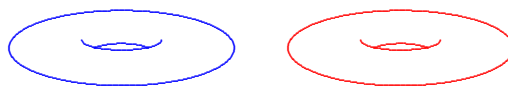
Conventions:

$\overline{\mathbb{C}P}_2$ = version anti-orientée de $\mathbb{C}P_2$.

Conventions:

$\overline{\mathbb{C}P}_2$ = version anti-orientée de $\mathbb{C}P_2$.

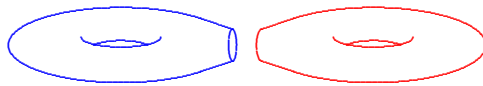
Somme connexe #:



Conventions:

$\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2$ = version anti-orientée de $\mathbb{C}\mathbb{P}_2$.

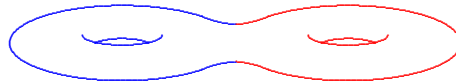
Somme connexe #:



Conventions:

$\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2$ = version anti-orientée de $\mathbb{C}\mathbb{P}_2$.

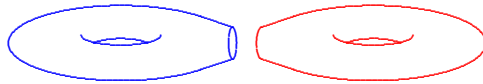
Somme connexe #:



Conventions:

$\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2$ = version anti-orientée de $\mathbb{C}\mathbb{P}_2$.

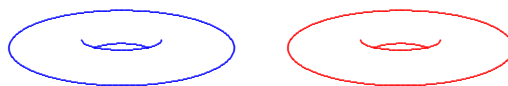
Somme connexe #:



Conventions:

$\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2$ = version anti-orientée de $\mathbb{C}\mathbb{P}_2$.

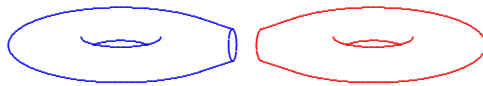
Somme connexe #:



Conventions:

$\overline{\mathbb{C}P}_2$ = version anti-orientée de $\mathbb{C}P_2$.

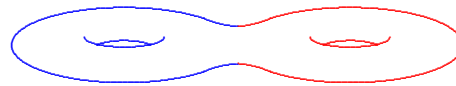
Somme connexe #:



Conventions:

$\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2$ = version anti-orientée de $\mathbb{C}\mathbb{P}_2$.

Somme connexe #:



Théorème (L '09). Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω . Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}P_2 \# k \overline{\mathbb{C}P}_2, \quad 0 \leq k \leq 8, \end{array} \right.$$

Théorème (L '09). Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω . Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}\mathbb{P}_2 \# k \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}_2}, \quad 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \end{array} \right.$$

Théorème (L '09). Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω . Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}\mathbb{P}_2 \# k \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}_2}, \quad 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ K3, \end{array} \right.$$

$K3$ = surface Kummer-Kähler-Kodaira.

Surface complexe simplement connexe à $c_1 = 0$.

$K3$ = surface Kummer-Kähler-Kodaira.

Surface complexe simplement connexe à $c_1 = 0$.

Unique, à difféomorphisme près.

$K3$ = surface Kummer-Kähler-Kodaira.

Surface complexe simplement connexe à $c_1 = 0$.

Modèle standard: Quartique lisse en $\mathbb{C}P_3$.



Théorème (L '09). Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω . Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}\mathbb{P}_2 \# k \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}_2}, \quad 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ K3, \end{array} \right.$$

Théorème (L '09). Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω . Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}\mathbb{P}_2 \# k \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}_2}, \quad 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ K3, \\ K3/\mathbb{Z}_2, \end{array} \right.$$

Théorème (L '09). Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω . Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}P_2 \# k \overline{\mathbb{C}P}_2, \quad 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ K3, \\ K3/\mathbb{Z}_2, \\ T^4, \end{array} \right.$$

Théorème (L '09). Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω . Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}\mathbb{P}_2 \# k \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}_2}, \quad 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ K3, \\ K3/\mathbb{Z}_2, \\ T^4, \\ T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6, \end{array} \right.$$

Théorème (L '09). Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω . Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}\mathbb{P}_2 \# k \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}_2}, \quad 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ K3, \\ K3/\mathbb{Z}_2, \\ T^4, \\ T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6, \\ T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4). \end{array} \right.$$

Théorème (L '09). Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω . Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}\mathbb{P}_2 \# k \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}_2}, \quad 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ K3, \\ K3/\mathbb{Z}_2, \\ T^4, \\ T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6, \\ T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4). \end{array} \right.$$

Chacune admet des métriques d'Einstein à $\lambda \geq 0$.

Théorème (L '09). Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω . Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}\mathbb{P}_2 \# k \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}_2}, \quad 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ K3, \\ K3/\mathbb{Z}_2, \\ T^4, \\ T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6, \\ T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4). \end{array} \right.$$

Chacune admet des métriques d'Einstein à $\lambda \geq 0$.
Aucune autre admet aussi une forme symplectique.

Théorème (L '09). Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω . Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}\mathbb{P}_2 \# k \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}_2}, \quad 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ K3, \\ K3/\mathbb{Z}_2, \\ T^4, \\ T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6, \\ T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4). \end{array} \right.$$

Théorème (L '09). Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω . Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}\mathbb{P}_2 \# k \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}_2}, \quad 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ K3, \\ K3/\mathbb{Z}_2, \\ T^4, \\ T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6, \\ T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4). \end{array} \right.$$

surfaces de del Pezzo,

Théorème (L '09). Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω . Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}\mathbb{P}_2 \# k \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}_2}, \quad 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ K3, \\ K3/\mathbb{Z}_2, \\ T^4, \\ T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6, \\ T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4). \end{array} \right.$$

surfaces de del Pezzo,
surface K3,

Théorème (L '09). Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω . Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}\mathbb{P}_2 \# k \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}_2}, \quad 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ K3, \\ K3/\mathbb{Z}_2, \\ T^4, \\ T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6, \\ T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4). \end{array} \right.$$

surfaces de del Pezzo,
surface K3, surface Enriques,

Théorème (L '09). Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω . Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}\mathbb{P}_2 \# k \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}_2}, \quad 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ K3, \\ K3/\mathbb{Z}_2, \\ T^4, \\ T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6, \\ T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4). \end{array} \right.$$

surfaces de del Pezzo,
 surface K3, surface Enriques,
 surface abélienne,

Théorème (L '09). Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω . Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}\mathbb{P}_2 \# k \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}_2}, \quad 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ K3, \\ K3/\mathbb{Z}_2, \\ T^4, \\ T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6, \\ T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4). \end{array} \right.$$

surfaces de del Pezzo,

surface K3, surface Enriques,

surface abélienne, surfaces hyperelliptiques.

Il s'agit alors de la spécificité de la...

Géométrie en dimension 4:

Géométrie en dimension 4:

Sur une (M^4, h) orientée,

$$\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$$

Géométrie en dimension 4:

Sur une (M^4, h) orientée,

$$\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$$

où Λ^\pm sont les espaces propres à valeurs ± 1 de

$$\star : \Lambda^2 \rightarrow \Lambda^2,$$

$$\star^2 = 1.$$

Géométrie en dimension 4:

Sur une (M^4, h) orientée,

$$\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$$

où Λ^\pm sont les espaces propres à valeurs ± 1 de

$$\star : \Lambda^2 \rightarrow \Lambda^2,$$

$$\star^2 = 1.$$

Λ^+ = les 2-formes auto-duales.

Λ^- = les 2-formes anti-auto-duales.

Géométrie en dimension 4:

Sur une (M^4, h) orientée,

$$\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$$

où Λ^\pm sont les espaces propres à valeurs ± 1 de

$$\star : \Lambda^2 \rightarrow \Lambda^2,$$

$$\star^2 = 1.$$

Λ^+ = les 2-formes auto-duales.

Λ^- = les 2-formes anti-auto-duales.

Cette décomposition est conformément invariant!

Géométrie en dimension 4:

Sur une (M^4, h) orientée,

$$\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$$

où Λ^\pm sont les espaces propres à valeurs ± 1 de

$$\star : \Lambda^2 \rightarrow \Lambda^2,$$

$$\star^2 = 1.$$

Λ^+ = les 2-formes auto-duales.

Λ^- = les 2-formes anti-auto-duales.

Cette décomposition est conformément invariant!

$$h \rightsquigarrow u^2 h$$

Géométrie en dimension 4:

Sur une (M^4, h) orientée,

$$\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$$

où Λ^\pm sont les espaces propres à valeurs ± 1 de

$$\star : \Lambda^2 \rightarrow \Lambda^2,$$

$$\star^2 = 1.$$

Λ^+ = les 2-formes auto-duales.

Λ^- = les 2-formes anti-auto-duales.

Et pour cette raison...

Le tenseur de courbure de h

$$\mathcal{R} : \Lambda^2 \rightarrow \Lambda^2$$

Le tenseur de courbure de h

$$\mathcal{R} : \Lambda^2 \rightarrow \Lambda^2$$

décompose en 4 parties irréductibles:

Le tenseur de courbure de h

$$\mathcal{R} : \Lambda^2 \rightarrow \Lambda^2$$

décompose en 4 parties irréductibles:

	Λ^{+*}	Λ^{-*}
Λ^+	$W^+ + \frac{s}{12}$	$\overset{\circ}{r}$
Λ^-	$\overset{\circ}{r}$	$W^- + \frac{s}{12}$

Le tenseur de courbure de h

$$\mathcal{R} : \Lambda^2 \rightarrow \Lambda^2$$

décompose en 4 parties irréductibles:

	Λ^{+*}	Λ^{-*}
Λ^+	$W^+ + \frac{s}{12}$	$\overset{\circ}{r}$
Λ^-	$\overset{\circ}{r}$	$W^- + \frac{s}{12}$

Ici

s = courbure scalaire

$\overset{\circ}{r}$ = tenseur de Ricci sans trace

W^+ = tenseur de Weyl auto-dual

W^- = tenseur de Weyl anti-auto-dual

Le tenseur de courbure de h

$$\mathcal{R} : \Lambda^2 \rightarrow \Lambda^2$$

décompose en 4 parties irréductibles:

	Λ^{+*}	Λ^{-*}
Λ^+	$W^+ + \frac{s}{12}$	$\overset{\circ}{r}$
Λ^-	$\overset{\circ}{r}$	$W^- + \frac{s}{12}$

Ici

s = courbure scalaire

$\overset{\circ}{r}$ = tenseur de Ricci sans trace

W^+ = tenseur de Weyl auto-dual (*conformément invariant*)

W^- = tenseur de Weyl anti-auto-dual "

Théorème (L '09). Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω . Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}\mathbb{P}_2 \# k \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}_2}, \quad 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ K3, \\ K3/\mathbb{Z}_2, \\ T^4, \\ T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6, \\ T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4). \end{array} \right.$$

surfaces de del Pezzo,

surface K3, surface Enriques,

surface abélienne, surfaces hyperelliptique.

$$\mathbb{C}P_2 \# k \overline{\mathbb{C}P_2}, \quad 0 \leq k \leq 8,$$

$$S^2 \times S^2,$$

$$K3,$$

$$K3/\mathbb{Z}_2,$$

$$T^4,$$

$$T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6,$$

$$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4).$$

Liste définitive ...

$$\mathbb{C}P_2 \# k \overline{\mathbb{C}P_2}, \quad 0 \leq k \leq 8,$$

$$S^2 \times S^2,$$

$$K3,$$

$$K3/\mathbb{Z}_2,$$

$$T^4,$$

$$T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6,$$

$$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4).$$

$$\mathbb{C}P_2 \# k \overline{\mathbb{C}P_2}, \quad 0 \leq k \leq 8,$$

$$S^2 \times S^2,$$

$$K3,$$

$$K3/\mathbb{Z}_2,$$

$$T^4,$$

$$T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6,$$

$$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4).$$

Mais quelques cas sont mieux compris que les autres!

$$\mathbb{C}P_2 \# k \overline{\mathbb{C}P_2}, \quad 0 \leq k \leq 8,$$

$$S^2 \times S^2,$$

$$K3,$$

$$K3/\mathbb{Z}_2,$$

$$T^4,$$

$$T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6,$$

$$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4).$$

Mais quelques cas sont mieux compris que les autres!

$$\mathbb{C}P_2 \# k \overline{\mathbb{C}P_2}, \quad 0 \leq k \leq 8,$$
$$S^2 \times S^2,$$

$K3$,

$K3/\mathbb{Z}_2$,

T^4 ,

$T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6$,

$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3)$, ou $T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4)$.

Mais quelques cas sont mieux compris que les autres!

$$\mathbb{C}P_2 \# k \overline{\mathbb{C}P_2}, \quad 0 \leq k \leq 8,$$
$$S^2 \times S^2,$$

$K3$,

$K3/\mathbb{Z}_2$,

T^4 ,

$T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6$,

$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3)$, ou $T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4)$.

Au-dessous de la ligne:

Mais quelques cas sont mieux compris que les autres!

$$\mathbb{C}P_2 \# k \overline{\mathbb{C}P_2}, \quad 0 \leq k \leq 8,$$
$$S^2 \times S^2,$$

$K3$,

$K3/\mathbb{Z}_2$,

T^4 ,

$T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6$,

$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3)$, ou $T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4)$.

Au-dessous de la ligne:

Chaque métrique d'Einstein est Ricci-plate et kählérienne.

Mais quelques cas sont mieux compris que les autres!

$$\mathbb{C}P_2 \# k \overline{\mathbb{C}P_2}, \quad 0 \leq k \leq 8,$$
$$S^2 \times S^2,$$

$K3$,

$K3/\mathbb{Z}_2$,

T^4 ,

$T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6$,

$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3)$, ou $T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4)$.

Au-dessous de la ligne:

Chaque métrique d'Einstein est Ricci-plate et kählérienne.

Espace de modules $\mathcal{E}(M)$

Mais quelques cas sont mieux compris que les autres!

$$\mathbb{C}P_2 \# k \overline{\mathbb{C}P_2}, \quad 0 \leq k \leq 8,$$
$$S^2 \times S^2,$$

$K3$,

$K3/\mathbb{Z}_2$,

T^4 ,

$T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6$,

$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3)$, ou $T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4)$.

Au-dessous de la ligne:

Chaque métrique d'Einstein est Ricci-plate et kählérienne.

Espace de modules $\mathcal{E}(M) = \{\text{métriques d'Einstein } h\} / \sim$

Mais quelques cas sont mieux compris que les autres!

$$\mathbb{C}P_2 \# k \overline{\mathbb{C}P_2}, \quad 0 \leq k \leq 8,$$
$$S^2 \times S^2,$$

$K3$,

$K3/\mathbb{Z}_2$,

T^4 ,

$T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6$,

$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3)$, ou $T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4)$.

Au-dessous de la ligne:

Chaque métrique d'Einstein est Ricci-plate et kählérienne.

Espace de modules $\mathcal{E}(M)$ parfaitement connu.

Mais quelques cas sont mieux compris que les autres!

$$\mathbb{C}P_2 \# k \overline{\mathbb{C}P_2}, \quad 0 \leq k \leq 8,$$
$$S^2 \times S^2,$$

$K3$,

$K3/\mathbb{Z}_2$,

T^4 ,

$T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6$,

$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3)$, ou $T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4)$.

Au-dessous de la ligne:

Chaque métrique d'Einstein est Ricci-plate et kählérienne.

Espace de modules $\mathcal{E}(M)$ connexe!

$$\mathbb{C}P_2 \# k \overline{\mathbb{C}P_2}, \quad 0 \leq k \leq 8,$$
$$S^2 \times S^2,$$

$K3$,

$K3/\mathbb{Z}_2$,

T^4 ,

$T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6$,

$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3)$, ou $T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4)$.

Au-dessous de la ligne:

Chaque métrique d'Einstein est Ricci-plate et kählérienne.

Espace de modules $\mathcal{E}(M)$ connexe!

Au-dessus de la ligne:

$$\mathbb{C}P_2 \# k \overline{\mathbb{C}P_2}, \quad 0 \leq k \leq 8,$$
$$S^2 \times S^2,$$

$K3$,

$K3/\mathbb{Z}_2$,

T^4 ,

$T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6$,

$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3)$, ou $T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4)$.

Au-dessous de la ligne:

Chaque métrique d'Einstein est Ricci-plate et kählérienne.

Espace de modules $\mathcal{E}(M)$ connexe!

Au-dessus de la ligne:

Chaque variété admet une métrique d'Einstein.

$$\mathbb{C}P_2 \# k \overline{\mathbb{C}P_2}, \quad 0 \leq k \leq 8,$$
$$S^2 \times S^2,$$

$K3$,

$K3/\mathbb{Z}_2$,

T^4 ,

$T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6$,

$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3)$, ou $T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4)$.

Au-dessous de la ligne:

Chaque métrique d'Einstein est Ricci-plate et kählérienne.

Espace de modules $\mathcal{E}(M)$ connexe!

Au-dessus de la ligne:

Espace de modules $\mathcal{E}(M) \neq \emptyset$.

$$\mathbb{C}P_2 \# k \overline{\mathbb{C}P_2}, \quad 0 \leq k \leq 8,$$
$$S^2 \times S^2,$$

$K3$,

$K3/\mathbb{Z}_2$,

T^4 ,

$T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6$,

$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3)$, ou $T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4)$.

Au-dessous de la ligne:

Chaque métrique d'Einstein est Ricci-plate et kählérienne.

Espace de modules $\mathcal{E}(M)$ connexe!

Au-dessus de la ligne:

Espace de modules $\mathcal{E}(M) \neq \emptyset$. Est-il connexe?

$$\mathbb{C}P_2 \# k \overline{\mathbb{C}P_2}, \quad 0 \leq k \leq 8,$$
$$S^2 \times S^2,$$

$K3$,

$K3/\mathbb{Z}_2$,

T^4 ,

$T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6$,

$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3)$, ou $T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4)$.

Au-dessous de la ligne:

Chaque métrique d'Einstein est Ricci-plate et kählérienne.

Espace de modules $\mathcal{E}(M)$ connexe!

Surfaces de del Pezzo:

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points,

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points,
en position générale,

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale,

Surfaces de del Pezzo:

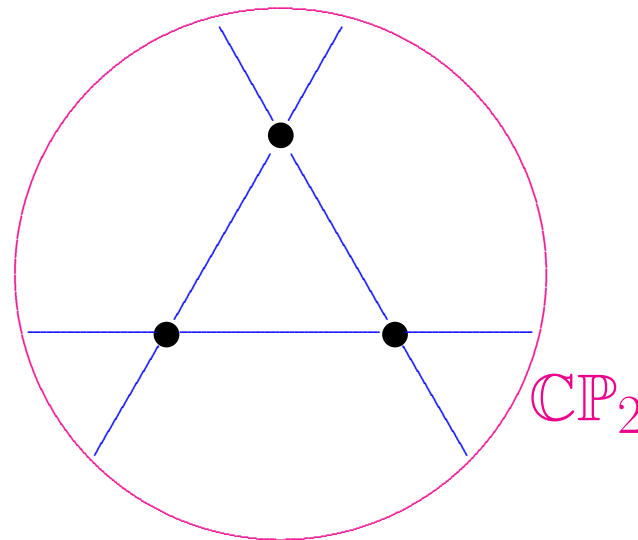
(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$.

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$.



Éclatement:

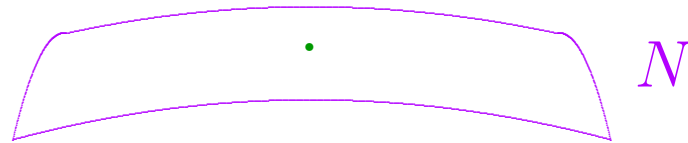
Éclatement:

Si N est une surface complexe,



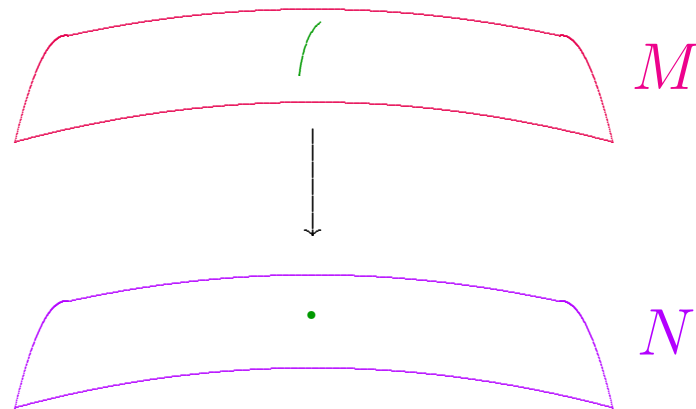
Éclatement:

Si N est une surface complexe, on remplace $p \in N$



Éclatement:

Si N est une surface complexe, on remplace $p \in N$
par un $\mathbb{C}P_1$,

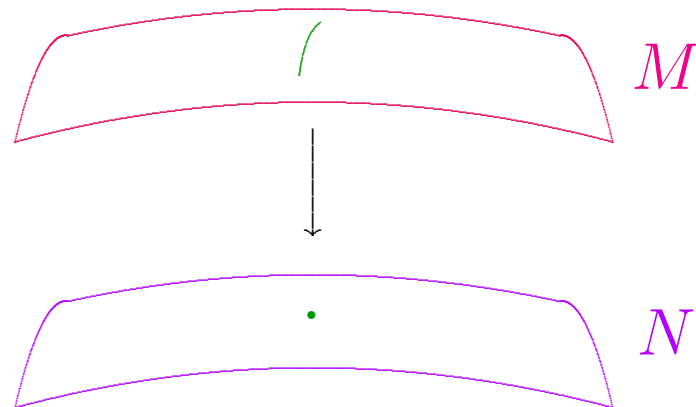


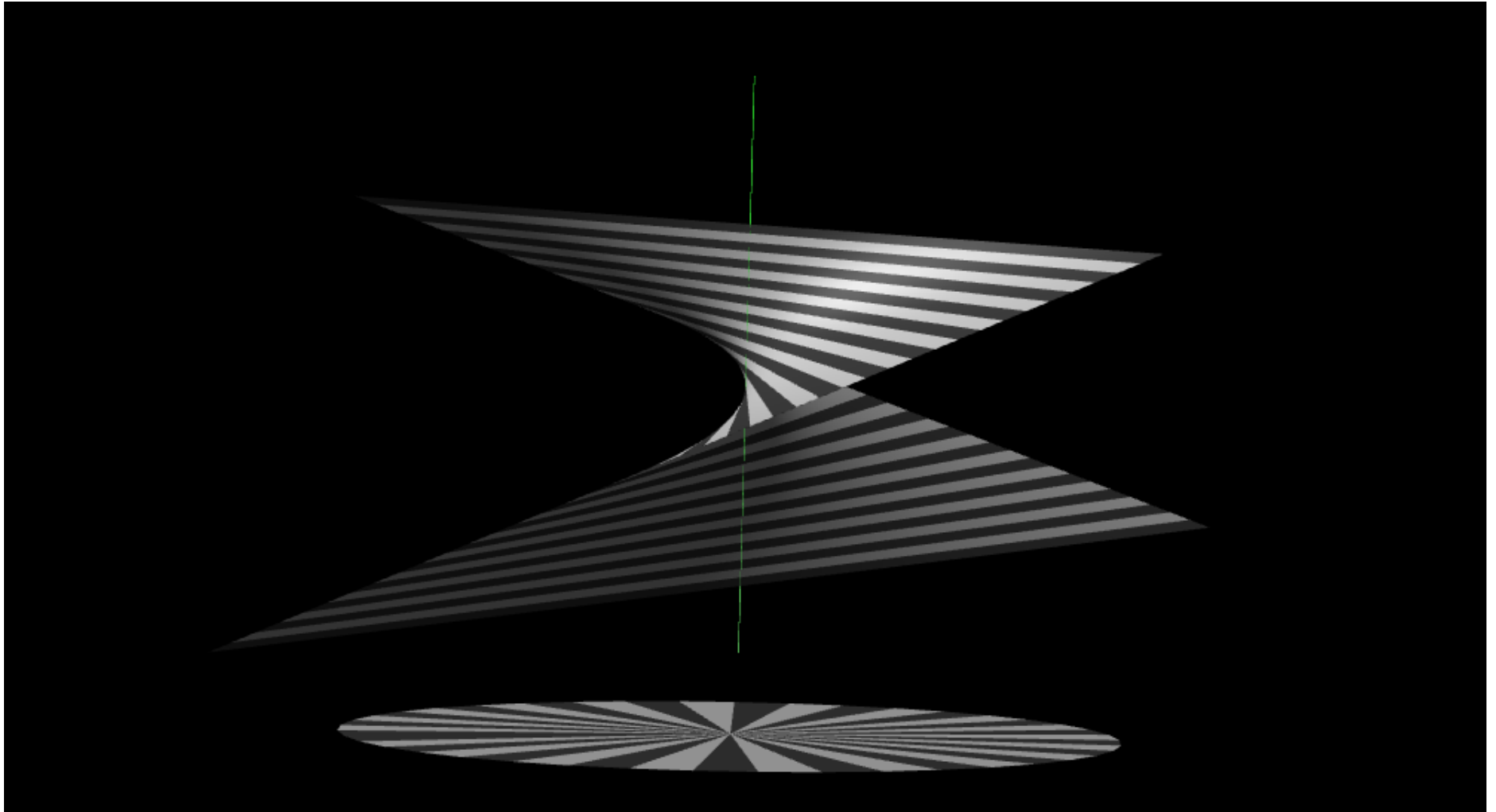
Éclatement:

Si N est une surface complexe, on remplace $p \in N$ par un $\mathbb{C}\mathbb{P}_1$, afin d'obtenir la surface l'éclatée

$$M \approx N \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}_2}$$

dans laquelle ce $\mathbb{C}\mathbb{P}_1$ a fibré normal $\mathcal{O}(-1)$.



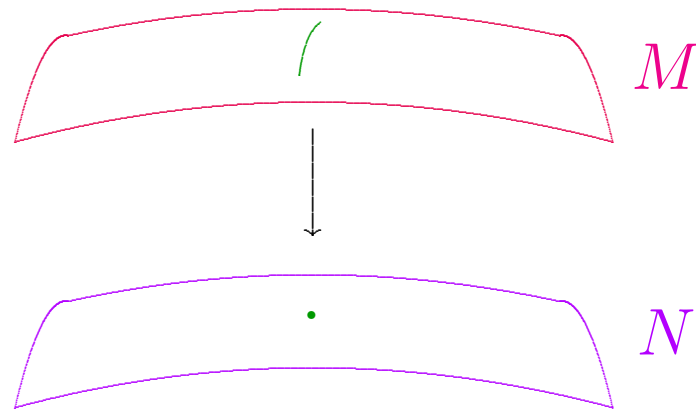


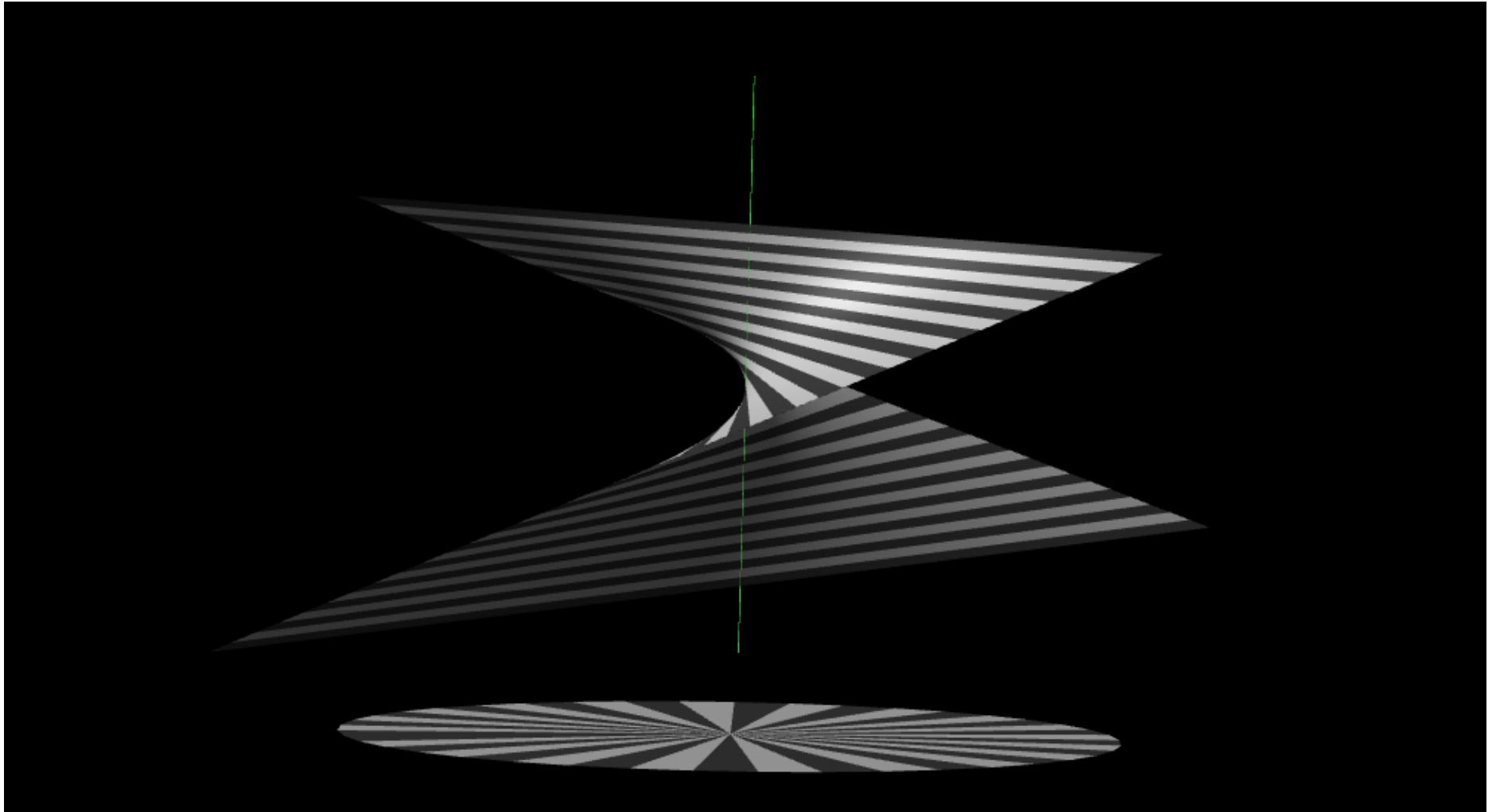
Éclatement:

Si N est une surface complexe, on remplace $p \in N$ par un $\mathbb{C}\mathbb{P}_1$, afin d'obtenir la surface l'éclatée

$$M \approx N \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}_2}$$

dans laquelle ce $\mathbb{C}\mathbb{P}_1$ a fibré normal $\mathcal{O}(-1)$.



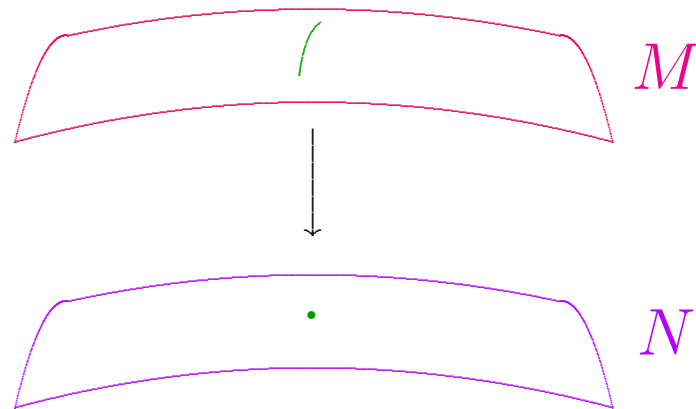


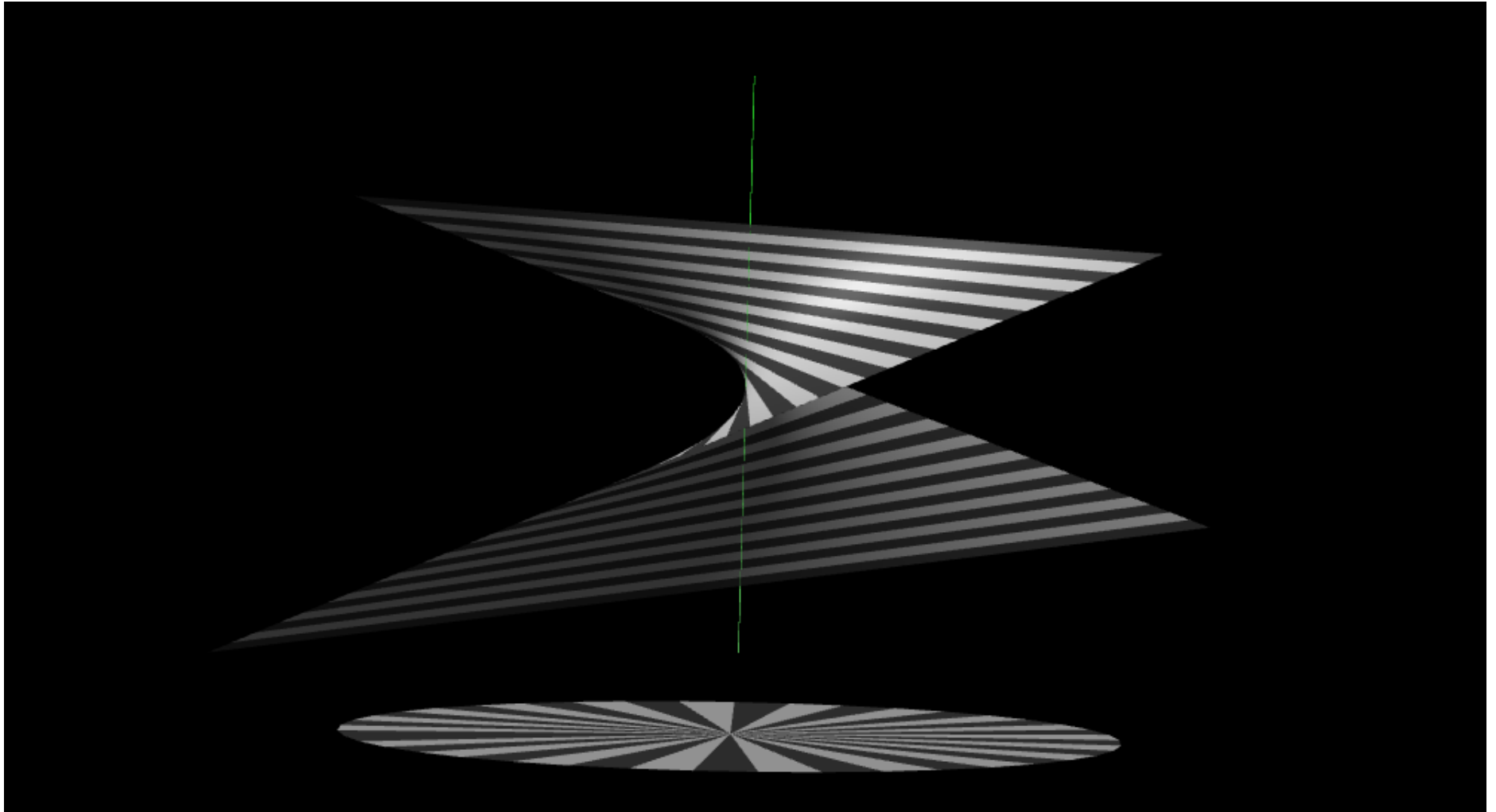
Éclatement:

Si N est une surface complexe, on remplace $p \in N$ par un $\mathbb{C}\mathbb{P}_1$, afin d'obtenir la surface l'éclatée

$$M \approx N \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}_2}$$

dans laquelle ce $\mathbb{C}\mathbb{P}_1$ a fibré normal $\mathcal{O}(-1)$.



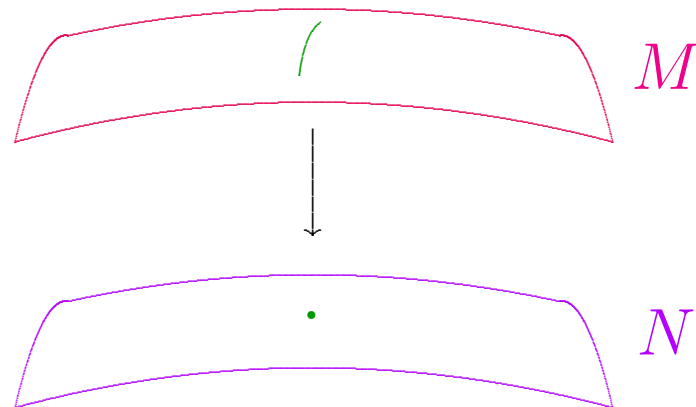


Éclatement:

Si N est une surface complexe, on remplace $p \in N$ par un $\mathbb{C}\mathbb{P}_1$, afin d'obtenir la surface l'éclatée

$$M \approx N \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}_2}$$

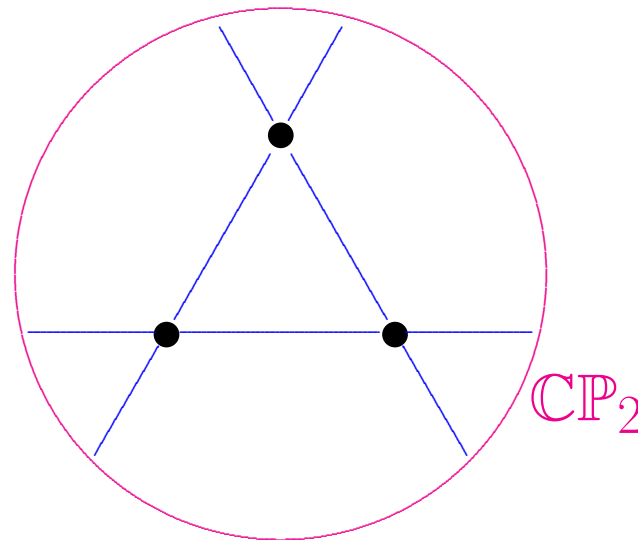
dans laquelle ce $\mathbb{C}\mathbb{P}_1$ a fibré normal $\mathcal{O}(-1)$.



Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

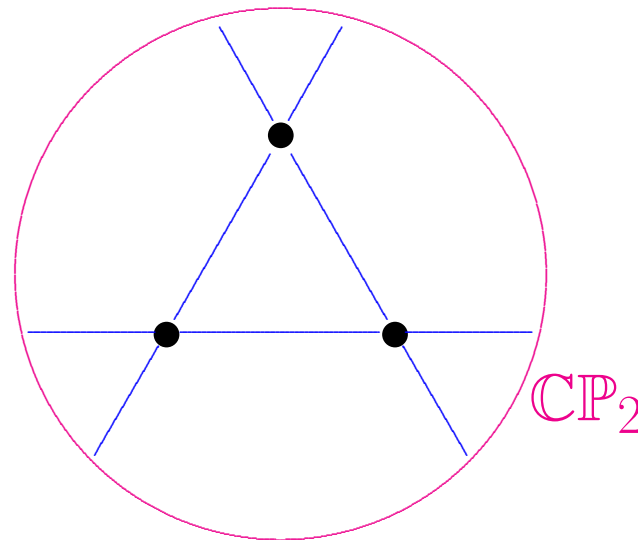
Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$.



Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$.

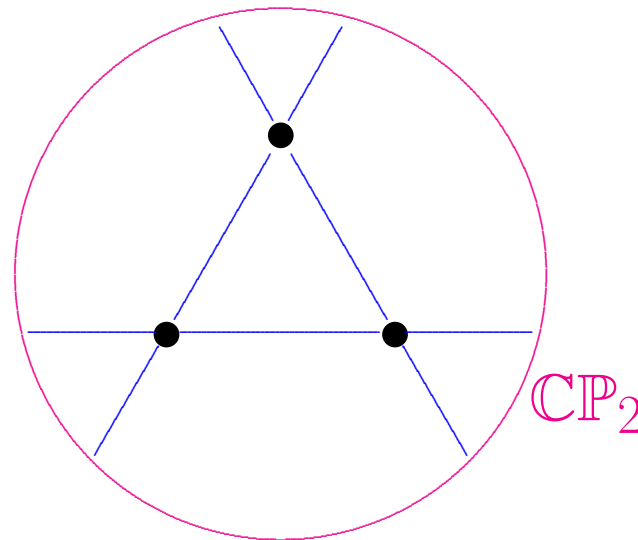


Les points sont tous distincts;

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$.

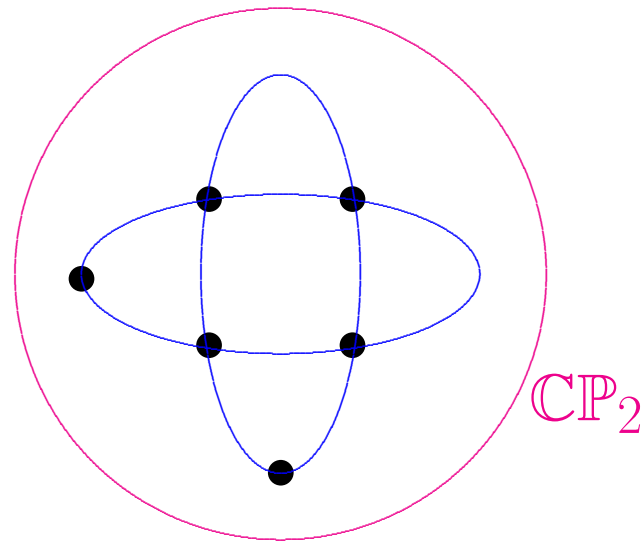


Aucune droite ne passe par 3 points;

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$.

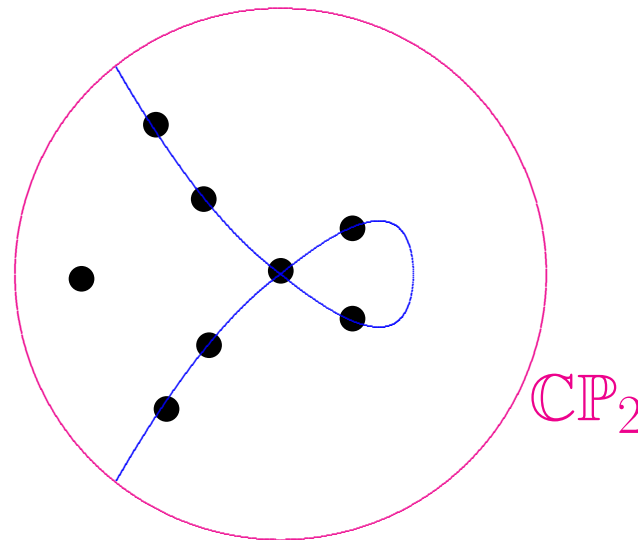


Aucune conique ne passe par 6 points;

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$.



Aucune cubique nodale ne passe par 8 points...

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählerienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$.

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$.

Théorème.

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo (M^4, J)*

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo (M^4, J) admet une métrique d'Einstein h*

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählerienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo (M^4, J) admet une métrique d'Einstein h qui est conformément kählerienne et compatible avec J .*

Géométrie Conforme:

Géométrie Conforme:

Les deux métriques riemanniennes g et h sont reliées conformément si

Géométrie Conforme:

Les deux métriques riemanniennes g et h sont reliées conformément si

$$h = f^2 g$$

pour une fonction lisse $f : M \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Géométrie Conforme:

Les deux métriques riemanniennes g et h sont reliées conformément si

$$h = f^2 g$$

pour une fonction lisse $f : M \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Si g est kählérienne, h est dite conformément kählérienne.

Géométrie Conforme:

Les deux métriques riemanniennes g et h sont reliées conformément si

$$h = f^2 g$$

pour une fonction lisse $f : M \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Si g est kählérienne, h est dite conformément kählérienne.

(M^4, h) d'Einstein et conformément kählérienne \implies

Géométrie Conforme:

Les deux métriques riemanniennes g et h sont reliées conformément si

$$h = f^2 g$$

pour une fonction lisse $f : M \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Si g est kählérienne, h est dite conformément kählérienne.

(M^4, h) d'Einstein et conformément kählérienne \implies
 g est Bach-plate

$$B_{ab} = (2\nabla^c \nabla^d + r^{cd}) W^+_{abcd} = 0$$

Géométrie Conforme:

Les deux métriques riemanniennes g et h sont reliées conformément si

$$h = f^2 g$$

pour une fonction lisse $f : M \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Si g est kählérienne, h est dite conformément kählérienne.

(M^4, h) d'Einstein et conformément kählérienne \implies
 g est Bach-plate $\implies g$ kählérienne extrémale:

$$\bar{\partial} \nabla^{1,0} s = 0.$$

Géométrie Conforme:

Les deux métriques riemanniennes g et h sont reliées conformément si

$$h = f^2 g$$

pour une fonction lisse $f : M \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Si g est kählérienne, h est dite conformément kählérienne.

(M^4, h) d'Einstein et conformément kählérienne \implies
 g est Bach-plate $\implies g$ kählérienne extrémale.

(M^4, h) compacte, mais non de Kähler-Einstein \implies

Géométrie Conforme:

Les deux métriques riemanniennes g et h sont reliées conformément si

$$h = f^2 g$$

pour une fonction lisse $f : M \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Si g est kählérienne, h est dite conformément kählérienne.

(M^4, h) d'Einstein et conformément kählérienne \implies
 g est Bach-plate $\implies g$ kählérienne extrémale.

(M^4, h) compacte, mais non de Kähler-Einstein \implies

$$s_g > 0 \quad \text{et} \quad h = \text{const } s^{-2} g$$

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählerienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo (M^4, J) admet une métrique d'Einstein h qui est conformément kählerienne et compatible avec J .*

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo (M^4, J) admet une métrique d'Einstein h qui est conformément kählérienne et compatible avec J . En outre, cette métrique est unique,*

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo (M^4, J) admet une métrique d'Einstein h qui est conformément kählérienne et compatible avec J . En outre, cette métrique est unique, à changements d'échelle et automorphismes complexes près.*

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählerienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo (M^4, J) admet une métrique d'Einstein h qui est conformé-ment kählerienne et compatible avec J . En outre, cette métrique est géométriquement unique.*

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo (M^4, J) admet une métrique d'Einstein h qui est conformément kählérienne et compatible avec J . En outre, cette métrique est géométriquement unique.*

Existence: Page

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo (M^4, J) admet une métrique d'Einstein h qui est conformément kählérienne et compatible avec J . En outre, cette métrique est géométriquement unique.*

Existence: Page-Derdziński,

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo (M^4, J) admet une métrique d'Einstein h qui est conformément kählérienne et compatible avec J . En outre, cette métrique est géométriquement unique.*

Existence: Page-Derdziński, Siu,

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo (M^4, J) admet une métrique d'Einstein h qui est conformément kählérienne et compatible avec J . En outre, cette métrique est géométriquement unique.*

Existence: Page-Derdziński, Siu, Tian-Yau,

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo (M^4, J) admet une métrique d'Einstein h qui est conformément kählérienne et compatible avec J . En outre, cette métrique est géométriquement unique.*

Existence: Page-Derdziński, Siu, Tian-Yau, Tian,

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo (M^4, J) admet une métrique d'Einstein h qui est conformément kählérienne et compatible avec J . En outre, cette métrique est géométriquement unique.*

Existence: Page-Derdziński, Siu, Tian-Yau, Tian,
Odaka-Spotti-Sun,

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo (M^4, J) admet une métrique d'Einstein h qui est conformément kählérienne et compatible avec J . En outre, cette métrique est géométriquement unique.*

Existence: Page-Derdziński, Siu, Tian-Yau, Tian, Odaka-Spotti-Sun, Chen-L-Weber.

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo (M^4, J) admet une métrique d'Einstein h qui est conformément kählérienne et compatible avec J . En outre, cette métrique est géométriquement unique.*

Unicité: Bando-Mabuchi '87

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählerienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{C}P_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{C}P_1 \times \mathbb{C}P_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo (M^4, J) admet une métrique d'Einstein h qui est conformément kählerienne et compatible avec J . En outre, cette métrique est géométriquement unique.*

Unicité: Bando-Mabuchi '87, L '12.

Problème central:

Problème central:

Classifier chaque métrique d'Einstein sur chaque surface de del Pezzo.

Problème central:

Classifier chaque métrique d'Einstein sur chaque surface de del Pezzo.

Est-ce-que l'espace de modules $\mathcal{E}(M)$ est connexe?

Problème central:

Classifier chaque métrique d'Einstein sur chaque surface de del Pezzo.

Est-ce-que l'espace de modules $\mathcal{E}(M)$ est connexe?

Progrès jusqu'à présent:

Problème central:

Classifier chaque métrique d'Einstein sur chaque surface de del Pezzo.

Est-ce-que l'espace de modules $\mathcal{E}(M)$ est connexe?

Progrès jusqu'à présent:

Caractérisation complète des métriques connues.

Problème central:

Classifier chaque métrique d'Einstein sur chaque surface de del Pezzo.

Est-ce-que l'espace de modules $\mathcal{E}(M)$ est connexe?

Progrès jusqu'à présent:

Caractérisation complète des métriques connues.

Remplissent exactement une composante de $\mathcal{E}(M)$!

Théorème (L '15).

Théorème (L '15). *Sur chaque variété lisse M^4
de del Pezzo,*

Théorème (L '15). *Sur chaque variété lisse M^4 de del Pezzo, les métriques d'Einstein conformément kählérienne*

Théorème (L '15). *Sur chaque variété lisse M^4 de del Pezzo, les métriques d'Einstein conformément kählérienne sont exactement celles pour lesquelles*

Théorème (L '15). *Sur chaque variété lisse M^4 de del Pezzo, les métriques d'Einstein conformément kählérienne sont exactement celles pour lesquelles*

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

Théorème (L '15). *Sur chaque variété lisse M^4 de del Pezzo, les métriques d'Einstein conformément kählérienne sont exactement celles pour lesquelles*

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

en chaque point de M ,

Théorème (L '15). *Sur chaque variété lisse M^4 de del Pezzo, les métriques d'Einstein conformément kählérienne sont exactement celles pour lesquelles*

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

en chaque point de M , pour une 2-forme harmonique auto-duale globale ω .

Théorème (L '15). *Sur chaque variété lisse M^4 de del Pezzo, les métriques d'Einstein conformément kählérienne sont exactement celles pour lesquelles*

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

en chaque point de M , pour une 2-forme harmonique auto-duale globale ω .

Corollaire. *Ces métriques d'Einstein sur une variété lisse M^4 de del Pezzo quelconque*

Théorème (L '15). *Sur chaque variété lisse M^4 de del Pezzo, les métriques d'Einstein conformément kählérienne sont exactement celles pour lesquelles*

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

en chaque point de M , pour une 2-forme harmonique auto-duale globale ω .

Corollaire. *Ces métriques d'Einstein sur une variété lisse M^4 de del Pezzo quelconque remplissent exactement une composante connexe*

Théorème (L '15). *Sur chaque variété lisse M^4 de del Pezzo, les métriques d'Einstein conformément kählérienne sont exactement celles pour lesquelles*

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

en chaque point de M , pour une 2-forme harmonique auto-duale globale ω .

Corollaire. *Ces métriques d'Einstein sur une variété lisse M^4 de del Pezzo quelconque remplissent exactement une composante connexe de l'espace de modules d'Einstein $\mathcal{E}(M)$.*

Un résultat assez satisfaisant...

Un résultat assez satisfaisant...

Mais la condition

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Un résultat assez satisfaisant...

Mais la condition

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Elle implique une 2-forme harmonique globale.

Un résultat assez satisfaisant...

Mais la condition

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Elle implique une 2-forme harmonique globale.

Peng Wu a découvert une caractérisation

Un résultat assez satisfaisant...

Mais la condition

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Elle implique une 2-forme harmonique globale.

Peng Wu a découvert une caractérisation par une condition purement locale sur W^+ .

Un résultat assez satisfaisant...

Mais la condition

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Elle implique une 2-forme harmonique globale.

Peng Wu a découvert une caractérisation par une condition purement locale sur W^+ .

$$\text{Kähler} \implies \Lambda^+ = \mathbb{R}\omega \oplus \Re\Lambda^{2,0}$$

$$W^+ = \text{partie sans trace de } \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \frac{s}{4} \end{bmatrix}$$

Un résultat assez satisfaisant...

Mais la condition

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Elle implique une 2-forme harmonique globale.

Peng Wu a découvert une caractérisation par une condition purement locale sur W^+ .

$$\text{Kähler} \implies \Lambda^+ = \mathbb{R}\omega \oplus \Re\Lambda^{2,0}$$

$$W^+ = \begin{bmatrix} -\frac{s}{12} & & \\ & -\frac{s}{12} & \\ & & \frac{s}{6} \end{bmatrix}$$

Un résultat assez satisfaisant...

Mais la condition

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Elle implique une 2-forme harmonique globale.

Peng Wu a découvert une caractérisation par une condition purement locale sur W^+ .

$$\text{Kähler} \implies \Lambda^+ = \mathbb{R}\omega \oplus \Re e \Lambda^{2,0}$$

$$\det(W^+) = \det \begin{bmatrix} -\frac{s}{12} & & \\ & -\frac{s}{12} & \\ & & \frac{s}{6} \end{bmatrix} = \frac{s^3}{864} > 0$$

pour ces métriques

Un résultat assez satisfaisant...

Mais la condition

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Elle implique une 2-forme harmonique globale.

Peng Wu a découvert une caractérisation par une condition purement locale sur W^+ .

$$\text{Kähler} \implies \Lambda^+ = \mathbb{R}\omega \oplus \Re e \Lambda^{2,0}$$

$$\det(W^+) = \det \begin{bmatrix} -\frac{s}{12} & & \\ & -\frac{s}{12} & \\ & & \frac{s}{6} \end{bmatrix} = \frac{s^3}{864} > 0$$

pour ces métriques & leurs classes conformes...

Un résultat assez satisfaisant...

Mais la condition

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Elle implique une 2-forme harmonique globale.

Peng Wu a découvert une caractérisation par une condition purement locale sur W^+ .

$$\text{Kähler} \implies \Lambda^+ = \mathbb{R}\omega \oplus \Re\Lambda^{2,0}$$

$$g \rightsquigarrow h = f^2 g \implies \det(W^+) \rightsquigarrow f^{-6} \det(W^+).$$

Un résultat assez satisfaisant...

Mais la condition

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Elle implique une 2-forme harmonique globale.

Peng Wu a découvert une caractérisation par une condition purement locale sur W^+ .

Critère de Wu:

$$\det(W^+) > 0.$$

Un résultat assez satisfaisant...

Mais la condition

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Elle implique une 2-forme harmonique globale.

Peng Wu a découvert une caractérisation par une condition purement locale sur W^+ .

Critère de Wu:

$$\det(W^+) > 0.$$

Wu (2021): brève preuve cryptique de \iff .

Un résultat assez satisfaisant...

Mais la condition

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Elle implique une 2-forme harmonique globale.

Peng Wu a découvert une caractérisation par une condition purement locale sur W^+ .

Critère de Wu:

$$\det(W^+) > 0.$$

Wu (2021): brève preuve cryptique de \iff .

L (2021): preuve complètement différente...

Un résultat assez satisfaisant...

Mais la condition

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Elle implique une 2-forme harmonique globale.

Peng Wu a découvert une caractérisation par une condition purement locale sur W^+ .

Critère de Wu:

$$\det(W^+) > 0.$$

Wu (2021): brève preuve cryptique de \iff .

L (2021): ... qui implique aussi...

Un résultat assez satisfaisant...

Mais la condition

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Elle implique une 2-forme harmonique globale.

Peng Wu a découvert une caractérisation par une condition purement locale sur W^+ .

Critère de Wu:

$$\det(W^+) > 0.$$

Wu (2021): brève preuve cryptique de \iff .

L (2021): ... des résultats supplémentaires.

Théorème A.

Théorème A. *Soit (M^4, h) une variété compacte simplement connexe orientée d'Einstein*

Théorème A. Soit (M^4, h) une variété compacte simplement connexe orientée d'Einstein pour laquelle la courbure de Weyl

$$W^+ : \Lambda^+ \rightarrow \Lambda^+$$

Théorème A. Soit (M^4, h) une variété compacte simplement connexe orientée d'Einstein pour laquelle la courbure de Weyl

$$W^+ : \Lambda^+ \rightarrow \Lambda^+$$

satisfait à

$$\det(W^+) > 0$$

Théorème A. Soit (M^4, h) une variété compacte simplement connexe orientée d'Einstein pour laquelle la courbure de Weyl

$$W^+ : \Lambda^+ \rightarrow \Lambda^+$$

satisfait à

$$\det(W^+) > 0$$

en chaque point de M .

Théorème A. Soit (M^4, h) une variété compacte simplement connexe orientée d'Einstein pour laquelle la courbure de Weyl

$$W^+ : \Lambda^+ \rightarrow \Lambda^+$$

satisfait à

$$\det(W^+) > 0$$

en chaque point de M . Alors $h = s^{-2}g$

Théorème A. Soit (M^4, h) une variété compacte simplement connexe orientée d'Einstein pour laquelle la courbure de Weyl

$$W^+ : \Lambda^+ \rightarrow \Lambda^+$$

satisfait à

$$\det(W^+) > 0$$

en chaque point de M . Alors $h = s^{-2}g$ pour une métrique kählérienne Bach-plate

Théorème A. Soit (M^4, h) une variété compacte simplement connexe orientée d'Einstein pour laquelle la courbure de Weyl

$$W^+ : \Lambda^+ \rightarrow \Lambda^+$$

satisfait à

$$\det(W^+) > 0$$

en chaque point de M . Alors $h = s^{-2}g$ pour une métrique kählérienne Bach-plate à courbure scalaire $s > 0$, adaptée à l'orientation de M .

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+ :

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+ :

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+ :

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+ :

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \quad \text{if } W^+ \neq 0$$

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+ :

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \quad \text{if } W^+ \neq 0$$

$$\det(W^+) = \alpha\beta\gamma$$

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+ :

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \quad \text{if } W^+ \neq 0$$

$$\det(W^+) = \alpha\beta\gamma$$

est donc du même signe que $-\beta$.

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+ :

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \quad \text{if } W^+ \neq 0$$

$$\det(W^+) = \alpha\beta\gamma$$

$$\det(W^+) > 0 \iff \beta < 0$$

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+ :

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \quad \text{if } W^+ \neq 0$$

$$\det(W^+) = \alpha\beta\gamma$$

$$\det(W^+) > 0 \iff \beta < 0$$

$$W^+ \sim \begin{bmatrix} + & & \\ & - & \\ & & - \end{bmatrix}$$

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+ :

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \quad \text{if } W^+ \neq 0$$

$$\det(W^+) = \alpha\beta\gamma$$

$$\det(W^+) > 0 \implies \alpha \text{ est de multiplicité } 1.$$

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+ :

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \quad \text{if } W^+ \neq 0$$

$$\det(W^+) = \alpha\beta\gamma$$

$$\det(W^+) > 0 \implies \alpha \text{ est de multiplicité } 1.$$

Donc $\alpha = \alpha_h : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction lisse, et

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+ :

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \quad \text{if } W^+ \neq 0$$

$$\det(W^+) = \alpha\beta\gamma$$

$$\det(W^+) > 0 \implies \alpha \text{ est de multiplicité } 1.$$

Donc $\alpha = \alpha_h : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction lisse, et on peut choisir ω avec $W^+(\omega) = \alpha\omega$, $|\omega|_h \equiv \sqrt{2}$,

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+ :

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \quad \text{if } W^+ \neq 0$$

$$\det(W^+) = \alpha\beta\gamma$$

$$\det(W^+) > 0 \implies \alpha \text{ est de multiplicité } 1.$$

Donc $\alpha = \alpha_h : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction lisse, et on peut choisir ω avec $W^+(\omega) = \alpha\omega$, $|\omega|_h \equiv \sqrt{2}$, soit sur M , soit sur un double revêtement \widetilde{M} .

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+ :

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \quad \text{if } W^+ \neq 0$$

$$\det(W^+) = \alpha\beta\gamma$$

$$\det(W^+) > 0 \implies \alpha \text{ est de multiplicité } 1.$$

\implies structure presque-complexe J sur M ou \widetilde{M} par

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+ :

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \quad \text{if } W^+ \neq 0$$

$$\det(W^+) = \alpha\beta\gamma$$

$$\det(W^+) > 0 \implies \alpha \text{ est de multiplicité } 1.$$

\implies structure presque-complexe J sur M ou \widetilde{M} par

$$\omega = h(J\cdot, \cdot).$$

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+ :

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \quad \text{if } W^+ \neq 0$$

$$\det(W^+) = \alpha\beta\gamma$$

$$\det(W^+) > 0 \implies \alpha \text{ est de multiplicité } 1.$$

\implies structure presque-complexe J sur M ou \widetilde{M} par

$$\omega = h(J\cdot, \cdot).$$

Énoncé: (M, h) compacte d'Einstein $\implies J$ intégrable.

Théorème A. Soit (M^4, h) une variété compacte simplement connexe orientée d'Einstein pour laquelle la courbure de Weyl

$$W^+ : \Lambda^+ \rightarrow \Lambda^+$$

satisfait à

$$\det(W^+) > 0$$

en chaque point de M . Alors $h = s^{-2}g$ pour une métrique kählérienne Bach-plate à courbure scalaire $s > 0$, adaptée à l'orientation de M .

Théorème A. Soit (M^4, h) une variété compacte simplement connexe orientée d'Einstein pour laquelle la courbure de Weyl

$$W^+ : \Lambda^+ \rightarrow \Lambda^+$$

satisfait à

$$\det(W^+) > 0$$

en chaque point de M . Alors $h = s^{-2}g$ pour une métrique kählérienne Bach-plate à courbure scalaire $s > 0$, adaptée à l'orientation de M .

Corollaire. Chaque (M^4, h) compacte simplement connexe orientée d'Einstein à $\det(W^+) > 0$ est difféomorphe à une surface de del Pezzo.

Théorème A. Soit (M^4, h) une variété compacte simplement connexe orientée d'Einstein pour laquelle la courbure de Weyl

$$W^+ : \Lambda^+ \rightarrow \Lambda^+$$

satisfait à

$$\det(W^+) > 0$$

en chaque point de M . Alors $h = s^{-2}g$ pour une métrique kählérienne Bach-plate à courbure scalaire $s > 0$, adaptée à l'orientation de M .

Corollaire. Chaque (M^4, h) compacte simplement connexe orientée d'Einstein à $\det(W^+) > 0$ est difféomorphe à une surface de del Pezzo. Inversement, chaque M^4 de del Pezzo admet de telles métrique, et ces métrique remplissent exactement une composante connexe de l'espace de modules $\mathcal{E}(M)$.

Théorème A. Soit (M^4, h) une variété compacte simplement connexe orientée d'Einstein pour laquelle la courbure de Weyl

$$W^+ : \Lambda^+ \rightarrow \Lambda^+$$

satisfait à

$$\det(W^+) > 0$$

en chaque point de M . Alors $h = s^{-2}g$ pour une métrique kählérienne Bach-plate à courbure scalaire $s > 0$, adaptée à l'orientation de M .

Théorème A. Soit (M^4, h) une variété compacte simplement connexe orientée d'Einstein pour laquelle la courbure de Weyl

$$W^+ : \Lambda^+ \rightarrow \Lambda^+$$

satisfait à

$$\det(W^+) > 0$$

en chaque point de M . Alors $h = s^{-2}g$ pour une métrique kählérienne Bach-plate à courbure scalaire $s > 0$, adaptée à l'orientation de M .

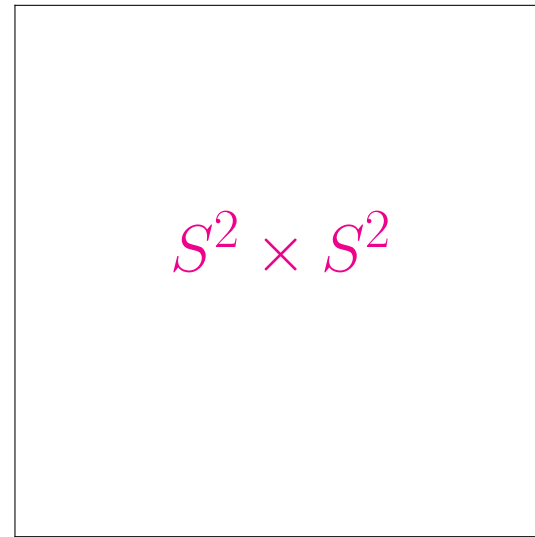
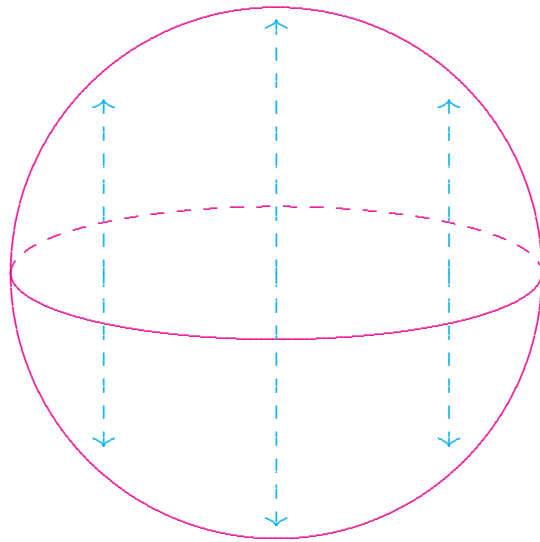
L'hypothèse de connexité simple est essentiel!

Théorème B. *Soit M^4 une variété compacte lisse orientée à $\pi_1 \neq 0$.*

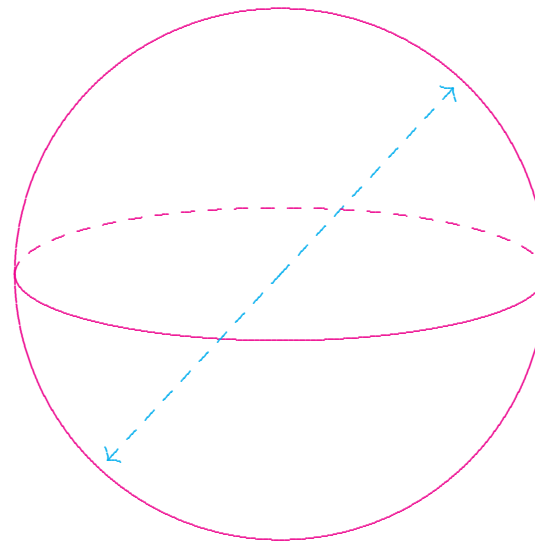
Théorème B. Soit M^4 une variété compacte lisse orientée à $\pi_1 \neq 0$. Alors M admet une métrique d'Einstein h à $\det(W^+) > 0 \iff$

Théorème B. Soit M^4 une variété compacte lisse orientée à $\pi_1 \neq 0$. Alors M admet une métrique d'Einstein h à $\det(W^+) > 0 \iff$

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \left\{ \mathcal{P} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{r} \rangle, \right.$$



Variété orientée de spin
 $\mathcal{P} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{r} \rangle$

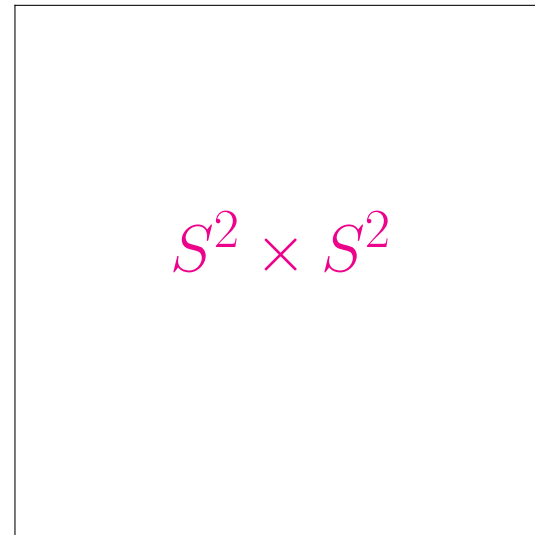
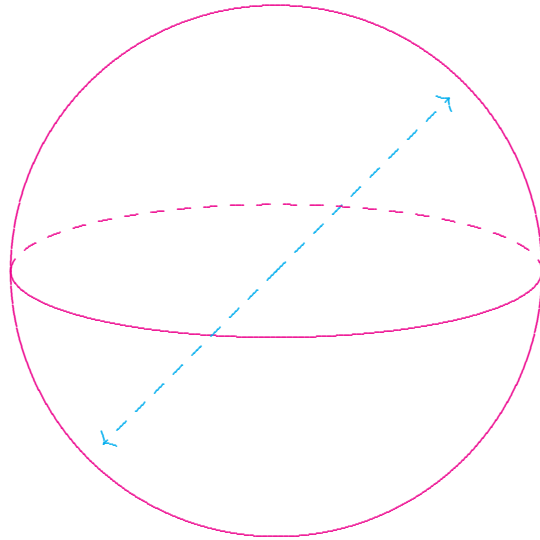


Théorème B. Soit M^4 une variété compacte lisse orientée à $\pi_1 \neq 0$. Alors M admet une métrique d'Einstein h à $\det(W^+) > 0 \iff$

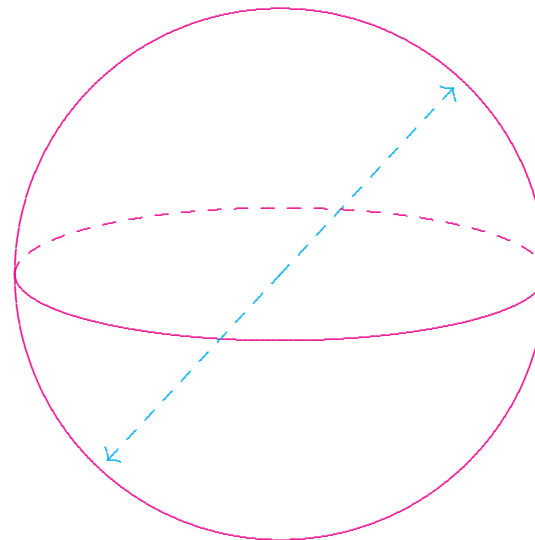
$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \left\{ \mathcal{P} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{r} \rangle, \right.$$

Théorème B. Soit M^4 une variété compacte lisse orientée à $\pi_1 \neq 0$. Alors M admet une métrique d'Einstein h à $\det(W^+) > 0 \iff$

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{r} \rangle, \\ \mathcal{Q} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{a} \rangle, \end{array} \right.$$



Variété orientée non-spin
 $\mathcal{Q} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{a} \rangle$



Théorème B. Soit M^4 une variété compacte lisse orientée à $\pi_1 \neq 0$. Alors M admet une métrique d'Einstein h à $\det(W^+) > 0 \iff$

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{r} \rangle, \\ \mathcal{Q} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{a} \rangle, \end{array} \right.$$

Théorème B. Soit M^4 une variété compacte lisse orientée à $\pi_1 \neq 0$. Alors M admet une métrique d'Einstein h à $\det(W^+) > 0 \iff$

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{r} \rangle, \\ \mathcal{Q} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{a} \rangle, \\ \mathcal{Q} \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2, \end{array} \right.$$

Théorème B. Soit M^4 une variété compacte lisse orientée à $\pi_1 \neq 0$. Alors M admet une métrique d'Einstein h à $\det(W^+) > 0 \iff$

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \begin{cases} \mathcal{P} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{r} \rangle, \\ \mathcal{Q} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{a} \rangle, \\ \mathcal{Q} \# \overline{\mathbb{C}P}_2, \\ \mathcal{Q} \# 2\overline{\mathbb{C}P}_2, \end{cases}$$

Théorème B. Soit M^4 une variété compacte lisse orientée à $\pi_1 \neq 0$. Alors M admet une métrique d'Einstein h à $\det(W^+) > 0 \iff$

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \begin{cases} \mathcal{P} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{r} \rangle, \\ \mathcal{Q} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{a} \rangle, \\ \mathcal{Q} \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2, \\ \mathcal{Q} \# 2\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2, \quad \text{ou} \\ \mathcal{Q} \# 3\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2. \end{cases}$$

Théorème B. Soit M^4 une variété compacte lisse orientée à $\pi_1 \neq 0$. Alors M admet une métrique d'Einstein h à $\det(W^+) > 0 \iff$

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \begin{cases} \mathcal{P} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{r} \rangle, \\ \mathcal{Q} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{a} \rangle, \\ \mathcal{Q} \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2, \\ \mathcal{Q} \# 2\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2, \quad \text{ou} \\ \mathcal{Q} \# 3\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2. \end{cases}$$

En outre, pour chaque telle métrique h ,

Théorème B. Soit M^4 une variété compacte lisse orientée à $\pi_1 \neq 0$. Alors M admet une métrique d'Einstein h à $\det(W^+) > 0 \iff$

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \begin{cases} \mathcal{P} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{r} \rangle, \\ \mathcal{Q} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{a} \rangle, \\ \mathcal{Q} \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2, \\ \mathcal{Q} \# 2\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2, \quad \text{ou} \\ \mathcal{Q} \# 3\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2. \end{cases}$$

En outre, pour chaque telle métrique h , le revêtement universel $(\widetilde{M}, \widetilde{h})$

Théorème B. Soit M^4 une variété compacte lisse orientée à $\pi_1 \neq 0$. Alors M admet une métrique d'Einstein h à $\det(W^+) > 0 \iff$

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \begin{cases} \mathcal{P} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{r} \rangle, \\ \mathcal{Q} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{a} \rangle, \\ \mathcal{Q} \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2, \\ \mathcal{Q} \# 2\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2, \quad \text{ou} \\ \mathcal{Q} \# 3\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2. \end{cases}$$

En outre, pour chaque telle métrique h , le revêtement universel $(\widetilde{M}, \widetilde{h})$ est de *Kähler-Einstein*,

Théorème B. Soit M^4 une variété compacte lisse orientée à $\pi_1 \neq 0$. Alors M admet une métrique d'Einstein h à $\det(W^+) > 0 \iff$

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{r} \rangle, \\ \mathcal{Q} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{a} \rangle, \\ \mathcal{Q} \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2, \\ \mathcal{Q} \# 2\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2, \quad \text{ou} \\ \mathcal{Q} \# 3\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2. \end{array} \right.$$

En outre, pour chaque telle métrique h , le revêtement universel $(\widetilde{M}, \widetilde{h})$ est de *Kähler-Einstein*, et

$$\widetilde{M} \stackrel{\text{diff}}{\approx} \left\{ \begin{array}{l} S^2 \times S^2 \end{array} \right.$$

Théorème B. Soit M^4 une variété compacte lisse orientée à $\pi_1 \neq 0$. Alors M admet une métrique d'Einstein h à $\det(W^+) > 0 \iff$

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \begin{cases} \mathcal{P} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{r} \rangle, \\ \mathcal{Q} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{a} \rangle, \\ \mathcal{Q} \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2, \\ \mathcal{Q} \# 2\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2, \quad \text{ou} \\ \mathcal{Q} \# 3\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2. \end{cases}$$

En outre, pour chaque telle métrique h , le revêtement universel $(\widetilde{M}, \widetilde{h})$ est de *Kähler-Einstein*, et

$$\widetilde{M} \stackrel{\text{diff}}{\approx} \begin{cases} S^2 \times S^2 \\ \mathbb{C}\mathbb{P}_2 \# 3\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2, \end{cases}$$

Théorème B. Soit M^4 une variété compacte lisse orientée à $\pi_1 \neq 0$. Alors M admet une métrique d'Einstein h à $\det(W^+) > 0 \iff$

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \begin{cases} \mathcal{P} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{r} \rangle, \\ \mathcal{Q} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{a} \rangle, \\ \mathcal{Q} \# \overline{\mathbb{C}P}_2, \\ \mathcal{Q} \# 2\overline{\mathbb{C}P}_2, \quad \text{ou} \\ \mathcal{Q} \# 3\overline{\mathbb{C}P}_2. \end{cases}$$

En outre, pour chaque telle métrique h , le revêtement universel $(\widetilde{M}, \widetilde{h})$ est de *Kähler-Einstein*, et

$$\widetilde{M} \stackrel{\text{diff}}{\approx} \begin{cases} S^2 \times S^2 \\ \mathbb{C}P_2 \# 3\overline{\mathbb{C}P}_2, \\ \mathbb{C}P_2 \# 5\overline{\mathbb{C}P}_2, \end{cases}$$

Théorème B. Soit M^4 une variété compacte lisse orientée à $\pi_1 \neq 0$. Alors M admet une métrique d'Einstein h à $\det(W^+) > 0 \iff$

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \begin{cases} \mathcal{P} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{r} \rangle, \\ \mathcal{Q} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{a} \rangle, \\ \mathcal{Q} \# \overline{\mathbb{C}P}_2, \\ \mathcal{Q} \# 2\overline{\mathbb{C}P}_2, \quad \text{ou} \\ \mathcal{Q} \# 3\overline{\mathbb{C}P}_2. \end{cases}$$

En outre, pour chaque telle métrique h , le revêtement universel $(\widetilde{M}, \widetilde{h})$ est de *Kähler-Einstein*, et

$$\widetilde{M} \stackrel{\text{diff}}{\approx} \begin{cases} S^2 \times S^2 \\ \mathbb{C}P_2 \# 3\overline{\mathbb{C}P}_2, \\ \mathbb{C}P_2 \# 5\overline{\mathbb{C}P}_2, \quad \text{ou} \\ \mathbb{C}P_2 \# 7\overline{\mathbb{C}P}_2, \end{cases}$$

Théorème B. Soit M^4 une variété compacte lisse orientée à $\pi_1 \neq 0$. Alors M admet une métrique d'Einstein h à $\det(W^+) > 0 \iff$

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \begin{cases} \mathcal{P} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{r} \rangle, \\ \mathcal{Q} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{a} \rangle, \\ \mathcal{Q} \# \overline{\mathbb{C}P}_2, \\ \mathcal{Q} \# 2\overline{\mathbb{C}P}_2, \quad \text{ou} \\ \mathcal{Q} \# 3\overline{\mathbb{C}P}_2. \end{cases}$$

En outre, pour chaque telle métrique h , le revêtement universel $(\widetilde{M}, \widetilde{h})$ est de *Kähler-Einstein*, et

$$\widetilde{M} \stackrel{\text{diff}}{\approx} \begin{cases} S^2 \times S^2 \\ \mathbb{C}P_2 \# 3\overline{\mathbb{C}P}_2, \\ \mathbb{C}P_2 \# 5\overline{\mathbb{C}P}_2, \quad \text{ou} \\ \mathbb{C}P_2 \# 7\overline{\mathbb{C}P}_2, \end{cases}$$

est une *del Pezzo* définie sur \mathbb{R} ,

Théorème B. Soit M^4 une variété compacte lisse orientée à $\pi_1 \neq 0$. Alors M admet une métrique d'Einstein h à $\det(W^+) > 0 \iff$

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \begin{cases} \mathcal{P} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{r} \rangle, \\ \mathcal{Q} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{a} \rangle, \\ \mathcal{Q} \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2, \\ \mathcal{Q} \# 2\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2, \quad \text{ou} \\ \mathcal{Q} \# 3\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2. \end{cases}$$

En outre, pour chaque telle métrique h , le revêtement universel $(\widetilde{M}, \widetilde{h})$ est de *Kähler-Einstein*, et

$$\widetilde{M} \stackrel{\text{diff}}{\approx} \begin{cases} S^2 \times S^2 \\ \mathbb{C}\mathbb{P}_2 \# 3\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2, \\ \mathbb{C}\mathbb{P}_2 \# 5\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2, \quad \text{ou} \\ \mathbb{C}\mathbb{P}_2 \# 7\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2, \end{cases}$$

est une *del Pezzo* définie sur \mathbb{R} , à lieu réel \emptyset .

Théorème B. Soit M^4 une variété compacte lisse orientée à $\pi_1 \neq 0$. Alors M admet une métrique d'Einstein h à $\det(W^+) > 0 \iff$

$$M \stackrel{\text{diff}}{\approx} \begin{cases} \mathcal{P} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{r} \rangle, \\ \mathcal{Q} := (S^2 \times S^2) / \langle \mathbf{a} \times \mathbf{a} \rangle, \\ \mathcal{Q} \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2, \\ \mathcal{Q} \# 2\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2, \quad \text{ou} \\ \mathcal{Q} \# 3\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}}_2. \end{cases}$$

Théorème C. *À difféomorphisme près, il y a exactement 15 variété compacte lisse orientée M^4 qui admettent des métriques d'Einstein h à $\det(W^+) > 0$.*

Théorème C. *À difféomorphisme près, il y a exactement 15 variété compacte lisse orientée M^4 qui admettent des métriques d'Einstein h à $\det(W^+) > 0$. Pour chacune, l'espace $\mathcal{E}_{\det}(M)$ de modules de ces métriques spéciales est connexe,*

Théorème C. *À difféomorphisme près, il y a exactement 15 variété compacte lisse orientée M^4 qui admettent des métriques d'Einstein h à $\det(W^+) > 0$. Pour chacune, l'espace $\mathcal{E}_{\det}(M)$ de modules de ces métriques spéciales est connexe, et égale exactement une composante connexe de l'espace de modules d'Einstein $\mathcal{E}(M)$.*

Théorème C. À difféomorphisme près, il y a exactement 15 variété compacte lisse orientée M^4 qui admettent des métriques d'Einstein h à $\det(W^+) > 0$. Pour chacune, l'espace $\mathcal{E}_{\det}(M)$ de modules de ces métriques spéciales est connexe, et égale exactement une composante connexe de l'espace de modules d'Einstein $\mathcal{E}(M)$.

Pourquoi $\mathcal{E}_{\det}(M) \subset \mathcal{E}(M)$ est-il ouvert et fermé?

Théorème C. *À difféomorphisme près, il y a exactement 15 variété compacte lisse orientée M^4 qui admettent des métriques d'Einstein h à $\det(W^+) > 0$. Pour chacune, l'espace $\mathcal{E}_{\det}(M)$ de modules de ces métriques spéciales est connexe, et égale exactement une composante connexe de l'espace de modules d'Einstein $\mathcal{E}(M)$.*

Pourquoi $\mathcal{E}_{\det}(M) \subset \mathcal{E}(M)$ est-il ouvert et fermé?

Ouvert: $\det(W^+) > 0$.

Théorème C. *À difféomorphisme près, il y a exactement 15 variété compacte lisse orientée M^4 qui admettent des métriques d'Einstein h à $\det(W^+) > 0$. Pour chacune, l'espace $\mathcal{E}_{\det}(M)$ de modules de ces métriques spéciales est connexe, et égale exactement une composante connexe de l'espace de modules d'Einstein $\mathcal{E}(M)$.*

Pourquoi $\mathcal{E}_{\det}(M) \subset \mathcal{E}(M)$ est-il ouvert et fermé?

Ouvert: $\det(W^+) > 0$.

Fermé: $\det(W^+) = \frac{1}{3\sqrt{6}}|W^+|^3$ et $s \geq 0$.

Théorème C. *À difféomorphisme près, il y a exactement 15 variété compacte lisse orientée M^4 qui admettent des métriques d'Einstein h à $\det(W^+) > 0$. Pour chacune, l'espace $\mathcal{E}_{\det}(M)$ de modules de ces métriques spéciales est connexe, et égale exactement une composante connexe de l'espace de modules d'Einstein $\mathcal{E}(M)$.*

Théorème D. *Si une variété compacte orientée d'Einstein (M^4, h) satisfait à*

$$\det(W^+) > -\frac{5\sqrt{2}}{21\sqrt{21}}|W^+|^3$$

en chaque point de M , alors $\det(W^+) > 0$. Par conséquence, tous les résultats précédents s'appliquent avec cette hypothèse (apparemment) plus faible.

Idées de la preuve:

Pour simplicité, supposons que $\det(W^+) > 0 \dots$

Idées de la preuve:

Idées de la preuve:

Par la seconde identité de Bianchi,

Idées de la preuve:

Par la seconde identité de Bianchi,

$$h \text{ Einstein} \implies \delta W^+ = (\delta W)^+ = 0.$$

Idées de la preuve:

Par la seconde identité de Bianchi,

$$h \text{ Einstein} \implies \delta W^+ = (\delta W)^+ = 0.$$

$$(\delta W)_{bcd} := -\nabla_a W^a{}_{bcd} = -\nabla_{[c} r_{d]b} + \frac{1}{6} h_{b[c} \nabla_{d]} s$$

Idées de la preuve:

Par la seconde identité de Bianchi,

$$h \text{ Einstein} \implies \delta W^+ = (\delta W)^+ = 0.$$

$$(\delta W)_{bcd} := -\nabla_a W^a{}_{bcd} = -\nabla_{[c} r_{d]b} + \frac{1}{6} h_{b[c} \nabla_{d]} s$$

La stratégie:

Idées de la preuve:

Par la seconde identité de Bianchi,

$$h \text{ Einstein} \implies \delta W^+ = (\delta W)^+ = 0.$$

$$(\delta W)_{bcd} := -\nabla_a W^a{}_{bcd} = -\nabla_{[c} r_{d]b} + \frac{1}{6} h_{b[c} \nabla_{d]} s$$

La stratégie:

Étudier l'équation plus faible

Idées de la preuve:

Par la seconde identité de Bianchi,

$$h \text{ Einstein} \implies \delta W^+ = (\delta W)^+ = 0.$$

$$(\delta W)_{bcd} := -\nabla_a W^a{}_{bcd} = -\nabla_{[c} r_{d]b} + \frac{1}{6} h_{b[c} \nabla_{d]} s$$

La stratégie:

Étudier l'équation plus faible

$$\delta W^+ = 0$$

Idées de la preuve:

Par la seconde identité de Bianchi,

$$h \text{ Einstein} \implies \delta W^+ = (\delta W)^+ = 0.$$

$$(\delta W)_{bcd} := -\nabla_a W^a{}_{bcd} = -\nabla_{[c} r_{d]b} + \frac{1}{6} h_{b[c} \nabla_{d]} s$$

La stratégie:

Étudier l'équation plus faible

$$\delta W^+ = 0$$

qui bénéficie de bonnes propriétés conformes.

$\delta W^+ = 0$ est conformément invariant à poids.

$\delta W^+ = 0$ est conformément invariant à poids.

Si $h = f^2 g$ satisfait à

$\delta W^+ = 0$ est conformément invariant à poids.

Si $h = f^2 g$ satisfait à

$$\delta W^+ = 0$$

$\delta W^+ = 0$ est conformément invariant à poids.

Si $h = f^2 g$ satisfait à

$$\delta W^+ = 0$$

alors g , par contre, satisfait à

$\delta W^+ = 0$ est conformément invariant à poids.

Si $h = f^2 g$ satisfait à

$$\delta W^+ = 0$$

alors g , par contre, satisfait à

$$\delta(fW^+) = 0$$

$\delta W^+ = 0$ est conformément invariant à poids.

Si $h = f^2 g$ satisfait à

$$\delta W^+ = 0$$

alors g , par contre, satisfait à

$$\delta(f W^+) = 0$$

ce qui implique la formule de Weitzenböck

$\delta W^+ = 0$ est conformément invariant à poids.

Si $h = f^2 g$ satisfait à

$$\delta W^+ = 0$$

alors g , par contre, satisfait à

$$\delta(fW^+) = 0$$

ce qui implique la formule de Weitzenböck

$$0 = \nabla^* \nabla (fW^+) + \frac{s}{2} fW^+ - 6fW^+ \circ W^+ + 2f|W^+|^2 I$$

$\delta W^+ = 0$ est conformément invariant à poids.

Si $h = f^2 g$ satisfait à

$$\delta W^+ = 0$$

alors g , par contre, satisfait à

$$\delta(fW^+) = 0$$

ce qui implique la formule de Weitzenböck

$$0 = \nabla^* \nabla(fW^+) + \frac{s}{2} fW^+ - 6fW^+ \circ W^+ + 2f|W^+|^2 I$$

pour $fW^+ \in \text{End}(\Lambda^+)$.

Choisisons $g = f^{-2}h$

Choisissons $g = f^{-2}h$ et ω adaptées au problème,

Choisissons $g = f^{-2}h$ et ω adaptées au problème,
prendrons le produit L^2 de la formule de Weitzenböck

Choisissons $g = f^{-2}h$ et ω adaptées au problème,
prendrons le produit L^2 de la formule de Weitzenböck

$$0 = \nabla^* \nabla (f W^+) + \frac{s}{2} f W^+ - 6 f W^+ \circ W^+ + 2 f |W^+|^2 I$$

Choisissons $g = f^{-2}h$ et ω adaptées au problème,
prendrons le produit L^2 de la formule de Weitzenböck

$$0 = \nabla^* \nabla (f W^+) + \frac{s}{2} f W^+ - 6 f W^+ \circ W^+ + 2 f |W^+|^2 I$$

avec $\omega \otimes \omega$,

Choisissons $g = f^{-2}h$ et ω adaptées au problème,
prendrons le produit L^2 de la formule de Weitzenböck

$$0 = \nabla^* \nabla (f W^+) + \frac{s}{2} f W^+ - 6 f W^+ \circ W^+ + 2 f |W^+|^2 I$$

avec $\omega \otimes \omega$,

$$0 = \int_M [\langle \nabla^* \nabla (f W^+), \omega \otimes \omega \rangle + \dots] d\mu$$

Choisissons $g = f^{-2}h$ et ω adaptées au problème,
 prendrons le produit L^2 de la formule de Weitzenböck

$$0 = \nabla^* \nabla (f W^+) + \frac{s}{2} f W^+ - 6 f W^+ \circ W^+ + 2 f |W^+|^2 I$$

avec $\omega \otimes \omega$, et intégrerons par parties.

$$0 = \int_M [\langle \nabla^* \nabla (f W^+), \omega \otimes \omega \rangle + \dots] d\mu$$



Choisissons $g = f^{-2}h$ et ω adaptées au problème,
 prendrons le produit L^2 de la formule de Weitzenböck

$$0 = \nabla^* \nabla (f W^+) + \frac{s}{2} f W^+ - 6 f W^+ \circ W^+ + 2 f |W^+|^2 I$$

avec $\omega \otimes \omega$, et intégrerons par parties.

$$0 = \int_M [\langle f W^+, \nabla^* \nabla (\omega \otimes \omega) \rangle + \dots] d\mu$$

Choisissons $g = f^{-2}h$ et ω adaptées au problème,
 prendrons le produit L^2 de la formule de Weitzenböck

$$0 = \nabla^* \nabla (f W^+) + \frac{s}{2} f W^+ - 6 f W^+ \circ W^+ + 2 f |W^+|^2 I$$

avec $\omega \otimes \omega$, et intégrerons par parties.

$$0 = \int_M [\langle W^+, \nabla^* \nabla (\omega \otimes \omega) \rangle + \dots] f \, d\mu$$

Choisissons $g = f^{-2}h$ et ω adaptées au problème,
 prendrons le produit L^2 de la formule de Weitzenböck

$$0 = \nabla^* \nabla (f W^+) + \frac{s}{2} f W^+ - 6 f W^+ \circ W^+ + 2 f |W^+|^2 I$$

avec $\omega \otimes \omega$, et intégrerons par parties. Et voilà!

$$0 = \int_M \left[\langle W^+, \nabla^* \nabla (\omega \otimes \omega) \rangle + \frac{s}{2} W^+ (\omega, \omega) - 6 |W^+ (\omega)|^2 + 2 |W^+|^2 |\omega|^2 \right] f d\mu$$

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+ :

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \quad \text{if } W^+ \neq 0$$

$$\det(W^+) = \alpha\beta\gamma$$

$$\det(W^+) > 0 \implies \alpha \text{ est de multiplicité } 1.$$

Alors $\alpha = \alpha_h : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ est lisse.

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+ :

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \quad \text{if } W^+ \neq 0$$

$$\det(W^+) = \alpha\beta\gamma$$

$$\det(W^+) > 0 \implies \alpha \text{ est de multiplicité } 1.$$

Alors $\alpha = \alpha_h : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ est lisse. Définissons

$$f = \alpha_h^{-1/3}, \quad g = f^{-2}h = \alpha_h^{2/3}h.$$

Les valeurs propres de W^+ ont un poids conforme:

Les valeurs propres de W^+ ont un poids conforme:

Pour $g = f^{-2}h$,

Les valeurs propres de W^+ ont un poids conforme:

Pour $g = f^{-2}h$,

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^2 \alpha \\ f^2 \beta \\ f^2 \gamma \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de W^+ ont un poids conforme:

Pour $g = f^{-2}h$,

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^2 \alpha \\ f^2 \beta \\ f^2 \gamma \end{bmatrix}$$

Alors notre choix de $f = \alpha^{-1/3}$ implique

Les valeurs propres de W^+ ont un poids conforme:

Pour $g = f^{-2}h$,

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^2\alpha \\ f^2\beta \\ f^2\gamma \end{bmatrix}$$

Alors notre choix de $f = \alpha^{-1/3}$ implique

$$\alpha = \alpha^{1/3} = f^{-1}$$

Les valeurs propres de W^+ ont un poids conforme:

Pour $g = f^{-2}h$,

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^2\alpha \\ f^2\beta \\ f^2\gamma \end{bmatrix}$$

Alors notre choix de $f = \alpha^{-1/3}$ implique

$$\alpha = \alpha^{1/3} = f^{-1}$$

$$\implies \alpha f = 1$$

Les valeurs propres de W^+ ont un poids conforme:

Pour $g = f^{-2}h$,

$$\begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^2\alpha & & \\ & f^2\beta & \\ & & f^2\gamma \end{bmatrix}$$

Alors notre choix de $f = \alpha^{-1/3}$ implique

$$\alpha = \alpha^{1/3} = f^{-1}$$

$$\implies \alpha f = 1$$

Choisissons $\omega \in \Gamma\Lambda^+$ telles que

$$W_g^+(\omega) = \alpha \omega, \quad |\omega|_g \equiv \sqrt{2},$$

Les valeurs propres de W^+ ont un poids conforme:

Pour $g = f^{-2}h$,

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^2\alpha \\ f^2\beta \\ f^2\gamma \end{bmatrix}$$

Alors notre choix de $f = \alpha^{-1/3}$ implique

$$\alpha = \alpha^{1/3} = f^{-1}$$

$$\implies \alpha f = 1$$

Choisissons $\omega \in \Gamma\Lambda^+$ telles que

$$W_g^+(\omega) = \alpha \omega, \quad |\omega|_g \equiv \sqrt{2},$$

peut-être sur un double revêtement $\hat{M} \rightarrow M$.

$$0 = \int_{\hat{M}} \left[\langle W^+, \nabla^* \nabla (\omega \otimes \omega) \rangle + \frac{s}{2} W^+(\omega, \omega) - 6 |W^+(\omega)|^2 + 2 |W^+|^2 |\omega|^2 \right] f \, d\mu$$

$$0 = \int_M \left[\langle W^+, \nabla^* \nabla (\omega \otimes \omega) \rangle + \frac{s}{2} W^+(\omega, \omega) - 6 |W^+(\omega)|^2 + 2 |W^+|^2 |\omega|^2 \right] f \, d\mu$$

$$0 = \int_M \left[-2W^+(\nabla_e \omega, \nabla^e \omega) - 2W^+(\omega, \nabla^e \nabla_e \omega) \right. \\ \left. + \frac{s}{2} W^+(\omega, \omega) - 6|W^+(\omega)|^2 + 2|W^+|^2 |\omega|^2 \right] f \, d\mu$$

$$0 = \int_M \left[-2W^+(\nabla_e \omega, \nabla^e \omega) - 2\alpha \langle \omega, \nabla^e \nabla_e \omega \rangle \right. \\ \left. + \frac{s}{2} \alpha |\omega|^2 - 6\alpha^2 |\omega|^2 + 2|W^+|^2 |\omega|^2 \right] f \, d\mu$$

parce que

$$W_g^+(\omega) = \alpha \omega$$

$$0 = \int_M \left[-2W^+ (\nabla_e \omega, \nabla^e \omega) + 2\alpha \langle \omega, \nabla^* \nabla \omega \rangle \right. \\ \left. + \frac{s}{2} \alpha |\omega|^2 - 6\alpha^2 |\omega|^2 + 2|W^+|^2 |\omega|^2 \right] f \, d\mu$$

$$0 \geq \int_M \left[-2W^+(\nabla_e \omega, \nabla^e \omega) + 2\alpha \langle \omega, \nabla^* \nabla \omega \rangle \right. \\ \left. + \frac{s}{2} \alpha |\omega|^2 - 6\alpha^2 |\omega|^2 + 3\alpha^2 |\omega|^2 \right] f \, d\mu$$

parce que

$$|W_g^+|^2 \geq \frac{3}{2} \alpha^2$$

$$0 \geq \int_M \left[-2W^+(\nabla_e \omega, \nabla^e \omega) + 2\alpha \langle \omega, \nabla^* \nabla \omega \rangle \right. \\ \left. + \frac{s}{2} \alpha |\omega|^2 - 3\alpha^2 |\omega|^2 \right] f \, d\mu$$

$$|\omega|_g^2 = 2 \implies (\nabla_e \omega) \perp \omega$$

$$0 \geq \int_M \left[-2W^+(\nabla_e \omega, \nabla^e \omega) + 2\alpha \langle \omega, \nabla^* \nabla \omega \rangle \right. \\ \left. + \frac{s}{2} \alpha |\omega|^2 - 3\alpha^2 |\omega|^2 \right] f \, d\mu$$

$$|\omega|_g^2 = 2 \implies (\nabla_e \omega) \perp \omega$$

$$\det(W^+) > 0 \implies W^+ \sim \begin{bmatrix} + & & \\ & - & \\ & & - \end{bmatrix}$$

$$0 \geq \int_M \left[-2W^+(\nabla_e \omega, \nabla^e \omega) + 2\alpha \langle \omega, \nabla^* \nabla \omega \rangle \right. \\ \left. + \frac{s}{2} \alpha |\omega|^2 - 3\alpha^2 |\omega|^2 \right] f \, d\mu$$

$$|\omega|_g^2 = 2 \implies (\nabla_e \omega) \perp \omega$$

$$\det(W^+) > 0 \implies W^+(\nabla_e \omega, \nabla^e \omega) \leq 0$$

$$0 \geq \int_M \left[\begin{aligned} &2\alpha \langle \omega, \nabla^* \nabla \omega \rangle \\ &+ \frac{s}{2} \alpha |\omega|^2 - 3\alpha^2 |\omega|^2 \end{aligned} \right] f \, d\mu$$

$$|\omega|_g^2 = 2 \implies (\nabla_e \omega) \perp \omega$$

$$\det(W^+) > 0 \implies -W^+(\nabla_e \omega, \nabla^e \omega) \geq 0$$

$$0 \geq \int_M \left[2\alpha \langle \omega, \nabla^* \nabla \omega \rangle + \frac{s}{2} \alpha |\omega|^2 - 3\alpha^2 |\omega|^2 \right] f \, d\mu$$

$$0 \geq \int_M \left[2\langle \omega, \nabla^* \nabla \omega \rangle + \frac{s}{2} |\omega|^2 - 3\alpha |\omega|^2 \right] (\alpha f) d\mu$$

$$0 \geq \int_M \left[2\langle \omega, \nabla^* \nabla \omega \rangle + \frac{s}{2} |\omega|^2 - 3\alpha |\omega|^2 \right] (\alpha f) d\mu$$

Mais

$$\alpha f \equiv 1$$

$$0 \geq \int_M \left[2\langle \omega, \nabla^* \nabla \omega \rangle + \frac{s}{2} |\omega|^2 - 3|\omega|^2 \alpha \right] d\mu$$

$$0 \geq \int_M \left[2\langle \omega, \nabla^* \nabla \omega \rangle - 3W^+(\omega, \omega) + \frac{s}{2} |\omega|^2 \right] d\mu$$

$$0 \geq \int_M \left[\frac{1}{2} |\nabla \omega|^2 + \frac{3}{2} \langle \omega, \left(\nabla^* \nabla - 2W^+ + \frac{s}{3} \right) \omega \rangle \right] d\mu$$

$$0 \geq \int_M \left[\frac{1}{2} |\nabla \omega|^2 + \frac{3}{2} \langle \omega, (d + d^*)^2 \omega \rangle \right] d\mu$$

Parce que

$$(d + d^*)^2 = \nabla^* \nabla - 2W^+ + \frac{s}{3}$$

sur $\Gamma(\Lambda^+)$.

$$0 \geq \frac{1}{2} \int_M |\nabla \omega|^2 d\mu + 3 \int_M |d\omega|^2 d\mu$$

$$0 \geq \frac{1}{2} \int_M |\nabla \omega|^2 d\mu + 3 \int_M |d\omega|^2 d\mu$$

Donc $\nabla \omega \equiv 0$, et g est kählérienne!





Merci de m'avoir invité!





Bon rétablissement à la pandémie!