

# Noyaux de Bergman sur les surfaces de Riemann épointées

Hugues Auvray

— en collaboration avec X. Ma et G. Marinescu —

[ Math. Ann. DOI 10.1007/s00208-020-01957-y et arXiv:2004.03858 ]

30 octobre 2020

**Séminaire de géométrie et topologie**



CIRGET

# Sommaire

## 1 Noyaux de Bergman sur variétés complètes

- Cadre
- Résultats généraux

## 2 Surfaces de Riemann épointées

- Mise en place
- Application du théorème 0
- Résultats

## 3 Preuves

- Corollaire 4
- Théorème 1

# I-Noyaux de Bergman sur variétés complètes

## a) Cadre

- ▶ On part d'un fibré en droites holomorphe  $(\mathcal{L}, h)$  sur une variété kählérienne complète  $(X^n, \omega_X)$ ; pour simplifier, on suppose que  $h$  polarise  $\omega_X$  :  
 $iR^h = \omega_X$ .
- ▶ On considère, pour  $p \geq 1$ , l'espace de Hilbert

$$H_{(2)}^0(X, \mathcal{L}^p) = \{ \sigma \in L^2(X, \mathcal{L}^p) \mid \bar{\partial}^{\mathcal{L}^p} \sigma = 0 \}$$

(ici et par la suite,  $\mathcal{L}^p$  désigne  $(\mathcal{L}^{\otimes p}, h^p)$ ).

Cet espace peut être de dimension infinie lorsque  $X$  n'est pas compacte.

- ▶ À une telle structure on associe les **noyaux de Bergman**

$$\mathcal{B}_p : (x, y) \mapsto \sum_{\ell \geq 0} s_{\ell}^{(p)}(x) \otimes s_{\ell}^{(p)}(y)^* \in \mathcal{L}_x^p \otimes (\mathcal{L}_y^p)^*$$

pour une/toute base orthonormale  $(s_{\ell}^{(p)})_{\ell \geq 0}$  of  $H_{(2)}^0(X, \mathcal{L}^p)$ . On s'intéresse en particulier aux **fonctions de densité**

$$B_p(x) = \mathcal{B}_p(x, x) = \sum_{\ell \geq 0} |s_{\ell}^{(p)}(x)|_{h^p}^2 \geq 0.$$

- ▶ De manière alternative :  $B_p(x) = \sup_{\sigma \in H_{(2),p}^0 \setminus \{0\}} \frac{|\sigma(x)|_{h^p}^2}{\|\sigma\|_{L^2}^2}$ .

# I-Noyaux de Bergman sur variétés complètes

## b) Asymptotiques de $B_p$ : résultats généraux

### Théorème 0 (Ma-Marinescu, 2007)

Avec les notations précédentes, on fait l'hypothèse de géométrie bornée  $\text{Ric}(\omega_X) \geq -C\omega_X$  sur  $X$  pour une certaine constante  $C \geq 0$ . Alors pour tout  $j \geq 0$ , il existe  $\mathbf{b}_j \in C^\infty(X)$  telle que :

$$\forall K \in X, \forall k, m \geq 0, \exists Q = Q(K, k, m, \varepsilon, C, n), \forall p \gg 1,$$

$$\left\| p^{-n} B_p(x) - \sum_{j=0}^k \mathbf{b}_j p^{-j} \right\|_{C^m(K)} \leq Q p^{-k-1}.$$

Plus précisément,  $\mathbf{b}_0 = \frac{1}{(2\pi)^n}$  et  $\mathbf{b}_1 = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \frac{1}{4} \text{scal}(\omega_X)$  ( $n = \dim_{\mathbb{C}} X$ ).

## I-b) Asymptotiques de $B_p$ : résultats généraux

Quelques remarques :

- ▷ Longue histoire ; de nombreux noms associés : Tian (1990,  $k = 0$ ,  $m = 2$ ), Bouche (1990), Catlin-Zelditch (1999-98,  $X$  compacte), ...
- ▷ Quantification du théorème de plongement de Kodaira / algébrisation de la courbure scalaire en géométrie kählérienne.
- ▷ La preuve se fait en deux étapes :
  - 1- localisation de  $B_p$  ;
  - 2- calcul des asymptotiques une fois transportées les données géométriques dans  $\mathbb{C}^n$  (changements d'échelles).
- ▷ Cet énoncé ne dit rien sur les fonctions de densité de Bergman au voisinage de l'infini...

## II-Surfaces de Riemann épointées

### a) Mise en place

"La classe la plus élémentaire de variétés kählériennes complètes non-compactes."

► On fixe :

- $\Sigma = \bar{\Sigma} \setminus D$ , avec  $D = \{a_1, \dots, a_N\}$  le diviseur cuspidal dans une surface de Riemann compacte  $\bar{\Sigma}$ , et  $\omega_\Sigma$  un forme de Kähler lisse sur  $\Sigma$  ;
- un fibré en droites hermitien  $(L|_\Sigma, h)$  polarisant  $\omega_\Sigma$  ( $iR^h = \omega_\Sigma$ ), avec  $L$  holomorphe sur  $\bar{\Sigma}$ .

► On suppose de plus que l'on a des trivialisations

$$L|_{V_j} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \times \underbrace{\mathbb{D}_r}_{z_j}$$

( $0 < r < 1$ ) autour des  $a_j$ , telles que :

$$|1|_h^2(z_j) = |\log(|z_j|^2)|. \quad (*)$$

En particulier,

$$\omega_\Sigma = \omega_{\mathbb{D}^*}(z_j) \text{ sur } V_j^* = V_j \setminus \{a_j\},$$

où  $\omega_{\mathbb{D}^*} = \frac{idz \wedge d\bar{z}}{|z|^2 \log^2(|z|^2)}$  (métrique de Poincaré  $\mathbb{D}^*$ ).

## II-a) Cadre

### Une classe d'exemples arithmétiques. —

Ces hypothèses (en particulier, la propriété  $(*)$ ) sont naturelles, comme l'illustre la classe suivante d'exemples.

Si  $\Gamma \subset \mathrm{Psl}(2, \mathbb{R})$  est un groupe fuchsien de première espèce, géométriquement fini et sans élément elliptique, alors

$$\Sigma = \Gamma \backslash \mathbb{H}$$

peut être compactifiée par l'adjonction d'un nombre fini de points.

Réciproquement, si  $\Sigma = \bar{\Sigma} \setminus \{a_1, \dots, a_N\}$  vérifie (de manière équivalente) :

- $\tilde{\Sigma} = \mathbb{H}$ ,
- $2g_{\bar{\Sigma}} - 2 + N > 0$ ,
- $\Sigma$  admet une métrique de Kähler-Einstein à courbure scalaire négative, ou
- $K_{\bar{\Sigma}}[D]$  ( $D = \{a_1, \dots, a_N\}$ ) est ample,

alors :  $\Gamma = \pi_1(\Sigma)$  est un groupe fuchsien de première espèce, géométriquement fini et sans élément elliptique.

## II-a) Cadre

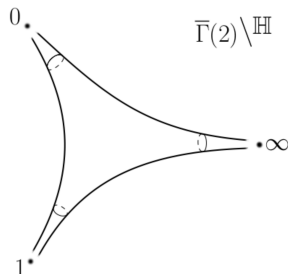
### Une classe d'exemples arithmétiques. —

Un cas simple : le **sous-groupe de congruence principal de niveau 2**

$$\Gamma = \bar{\Gamma}(2) = \ker\{\mathrm{Psl}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{Sl}(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\};$$

alors en tant que surfaces de Riemann,

$$\bar{\Gamma}(2)\backslash\mathbb{H} = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}.$$



Dans ce contexte,  $K_{\bar{\Sigma}}[D]$  est ample, et (la racine carré formelle) de  $(K_{\bar{\Sigma}}[D]_{|\Sigma}, \pi_*\omega_{\mathbb{H}} \otimes h_D)$  vérifie (\*) —  
ici,  $\omega_{\mathbb{H}}$  descend sur  $\Sigma$ , et  $h_D$  est définie sur  $\Sigma$  par :  $|\sigma_D|_{h_D}^2 \equiv 1$  pour une section  $\sigma_D \in \mathcal{O}([D])$  telle que  $D = \{\sigma_D = 0\}$ .



## II-Surfaces de Riemann épointées

### b) Application du théorème 0

Supposons que  $(\Sigma, \omega_\Sigma, L, h)$  vérifie  $(*)$ ; alors, pour  $p \geq 2$ ,

$$H_{(2)}^0(\Sigma, L|_\Sigma^p) \hookrightarrow H^0(\bar{\Sigma}, L^p),$$

et plus précisément, par le théorème d'extension de Skoda :

$$H_{(2)}^0(\Sigma, L|_\Sigma^p) \simeq \{ \sigma \in H^0(\bar{\Sigma}, L^p) \mid \sigma(a_j) = 0, j = 0, \dots, N \};$$

en particulier,  $H_{(2)}^0(\Sigma, L|_\Sigma^p)$  est de dimension finie, notée  $d_p$ .

Ainsi :

1- comme  $B_p^\Sigma(x) = \sum_{j=1}^{d_p} |\sigma_j^{(p)}(x)|_{h^p}^2$ , pour tout  $p$  fixé,

$$B_p^\Sigma(x) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } x \rightarrow D;$$

2- d'un autre côté, par le théorème 0, pour tout  $m \geq 1$  et tout compact  $K$  de  $\Sigma$ ,

$$\left\| \frac{2\pi}{p} B_p^\Sigma(x) - 1 \right\|_{C^m(K)} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } p \rightarrow \infty.$$

Que se passe-t-il dans la zone de transition ? Comment le décrire ?

# II-Surfaces de Riemann épointées

## c) Resultats

D'abord, deux résultats de *localisation* (comparaison avec le modèle  $\mathbb{D}^*$ ) :

### Théorème 1

Pour tout  $m \geq 0$ ,  $\ell \geq 0$  et  $\delta > 0$ , il existe  $Q = Q(m, \ell, \delta)$  tel que pour tout  $p \gg 1$ ,

$$\forall z \in V_1^* \cup \dots \cup V_N^*, \quad |\log(|z|^2)|^\delta |B_p^\Sigma(z) - B_p^{\mathbb{D}^*}(z)|_{C^m(\omega_\Sigma)} \leq Qp^{-\ell},$$

où  $B_p^{\mathbb{D}^*}$  est associée à la donnée  $(\mathbb{D}^*, \omega_{\mathbb{D}^*}, \mathbb{C}, |\log(|z|^2)| \cdot | \cdot |)$ .

et la version quotient (non triviale!) :

## Théorème 2

Le quotient  $B_p^\Sigma / B_p^{\mathbb{D}^*}$  s'étend de manière lisse à travers l'origine, et pour tout  $m \geq 0$  et  $\ell \geq 0$ , il existe  $Q = Q(m)$  tel que pour tout  $p \gg 1$ ,

$$\left| D_1 \cdots D_m \left( \frac{B_p^\Sigma}{B_p^{\mathbb{D}^*}} - 1 \right) \right| \leq Q p^{-\ell}$$

où chacun des  $D_j$  représente  $\frac{\partial}{\partial z}$  ou bien  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ .

et sa traduction géométrique :

## Théorème 3

On fixe un voisinage de coordonnées  $z$  autour d'un cusp de  $\Sigma$  comme dans la condition (\*). Alors la différence des tirés-en-arrière des métriques de Fubini-Study par les plongements induits respectivement par des bases orthonormales de  $H_{(2)}^0(\Sigma, L^p|_\Sigma)$  et  $H_{(2)}^{0,p}(\mathbb{D}^*)$  peut s'écrire  $\eta_p i dz \wedge d\bar{z}$ , avec :

$$D_1 \cdots D_m \eta_p = \mathcal{O}(p^{-\infty}) \quad \text{pour tout } m \geq 0.$$

## II-c) Resultats

À partir des théorèmes 0, 1, et d'un calcul explicite du modèle  $\mathbb{D}^*$ , on peut, entre autres, estimer le *facteur de distorsion* :

### Corollaire 4

Pour  $p \gg 1$ ,

$$\sup_{x \in \Sigma, \sigma \in H_{(2),p}^0 \setminus \{0\}} \frac{|\sigma(x)|_{h^p}^2}{\|\sigma\|_{L^2}^2} = \sup_{x \in \Sigma} B_p(x) = \left(\frac{p}{2\pi}\right)^{3/2} + \mathcal{O}(p).$$

Dans la situation arithmétique sus-mentionnée, cas  $\Gamma$  non-cocompact, ceci donne :

$$\sup_{z \in \mathbb{H}, f \in \mathcal{S}_{2p}^\Gamma \setminus \{0\}} \frac{(2\text{Im}z)^{2p} |f(z)|^2}{\|f\|_{\text{Pet}}^2} = \left(\frac{p}{\pi}\right)^{3/2} + \mathcal{O}(p),$$

où  $\mathcal{S}_{2p}^\Gamma$  est l'espace des **formes modulaires paraboliques (Spitzenformen)** de poids  $2p$ .

Remarques :  $\triangleright$  Si  $\Gamma$  est cocompact, le sup ci-dessus devient  $\frac{p}{\pi} + \mathcal{O}(1)$ .

- $\triangleright$  Dans la lignée de résultats d'Abbes-Ullmo, Michel-Ullmo, Friedman-Jorgenson-Kramer.
- $\triangleright$  Version où  $\Gamma$  admet des éléments elliptiques.

### III-Preuves

#### a) Corollaire 4

Par les théorèmes 0 et 1, il suffit d'établir le résultat analogue pour  $B_p^{\mathbb{D}^*}$  (sur un voisinage de  $0 \in \mathbb{D}$ ). Observons que  $\{z^\ell\}_{\ell \geq 1}$  est une famille orthogonale complète de  $H_{(2)}^0(\mathbb{D}^*, \omega_{\mathbb{D}^*}, \mathbb{C}, |\log(|z|^2)|^p \cdot | \cdot |)$ . Des calculs directs mènent à :

$$B_p^{\mathbb{D}^*}(z) = \frac{|\log(|z|^2)|^p}{2\pi(p-1)!} \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^{p-1} |z|^{2\ell}.$$

C'est assez explicite pour :

- i) confirmer la convergence donnée par les théorèmes 0, y compris jusqu'à  $\partial\mathbb{D}$ , à vitesse exponentielle ; ainsi, sur la couronne  $\{a \leq |z| < 1\}$  ( $a \in (0, 1)$ ),

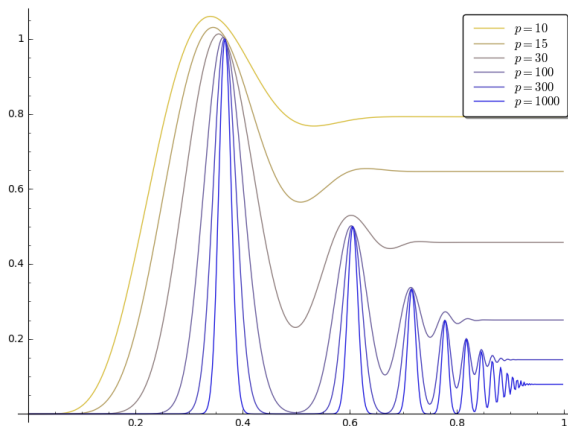
$$\left\| B_p^{\mathbb{D}^*}(x) - \frac{p-1}{2\pi} \right\|_{C^m(\{a \leq |z| < 1\})} = \mathcal{O}(e^{-cp}) \quad \text{avec } c = c(a) > 0;$$

- ii) analyser  $B_p^{\mathbb{D}^*}$  près de 0 : en posant  $x = |z|^{2/p}$  et  $f_p(x) = B_{p+1}^{\mathbb{D}^*}(z)$ , on obtient :

$$\left(\frac{2\pi}{p}\right)^{3/2} f_p = \sum_{\ell=1}^{\infty} [\text{Gaussiennes centrées en } e^{-1/\ell}, \text{ de hauteur } \frac{1}{\ell}].$$

### III-a) Corollaire 4

ii)



Les fonctions rééchelonnées et normalisées  $(\frac{2\pi}{p})^{3/2} f_p$  sur  $(0, 1)$

De ceci, on tire  $\sup_{[0,1]} f_p = (\frac{p}{2\pi})^{3/2} + \mathcal{O}(p)$ , et ce sup est atteint près de  $x = e^{-1}$  (ce qui correspond à  $|z| = e^{-p/2}$ ).

### III-a) Corollaire 4

Pour la traduction vers les formes modulaires, on rappelle :

- ▶ la définition de l'espace des formes modulaires paraboliques de poids  $2p$  :

$$\mathcal{M}_{2p}^{\Gamma} = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{H}) \mid \forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), f(\gamma \cdot z) = (cz + d)^{2p} f(z)\};$$

- ▶ l'isomorphisme de Mumford :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{M}_{2p}^{\Gamma} &\xrightarrow{\sim} H^0(\bar{\Sigma}, L^{2p}) \\ f &\longmapsto f(dz)^{\otimes p} \end{aligned} \quad ,$$

qui se restreint en une isométrie

$$\mathcal{S}_{2p}^{\Gamma} \xrightarrow{\sim} H_{(2)}^0(\Sigma, L^{2p})$$

où  $\mathcal{S}_{2p}^{\Gamma} = \{f \in \mathcal{M}_{2p}^{\Gamma} \mid (\Phi f)(a_j) = 0, j = 1, \dots, N\}$  est équipé de la *métrie de Petersson* :

$$\langle f, g \rangle_{\mathrm{Pet}} = \int_{\mathrm{dmn} \, \mathrm{fdmtl}} f(z) \overline{g(z)} (2y)^{2p} \, d\mathrm{vol}_{\mathbb{H}}(z).$$



# III-Preuves

## b) Théorème 1

- ▶ Repose sur la technologie développée par Ma-Marinescu, à la suite de Bismut-Lebeau, **centrée ici sur la singularité!**
- ▶ Basée sur :
  - i) vitesse de propagation finie pour les équations des ondes (des laplaciens de Kodaira);
  - ii) un trou spectral pour ces laplaciens.
- ▶ On obtient d'abord les estimées

$$\forall z \in V_1^* \cup \dots \cup V_N^*, \quad |\log(|z|^2)|^\delta |B_p^\Sigma(z) - B_p^{\mathbb{D}^*}(z)|_{C^m(\omega_\Sigma)} \leq Qp^{-\ell},$$

avec  $\delta < -\frac{1}{2}$  (au lieu de  $> 0$ )!

- ▶ On passe à  $\delta > 0$  à l'aide de l'holomorphicité des sections. □



### III-Preuves

#### c) Théorème 2

- ▶ Grâce aux théorèmes 0 & 1, on peut se restreindre aux couronnes  $|z| < cp^{-A}$ .
- ▶ Sur ces domaines, la contribution des  $z^j$  à  $B_p^{\mathbb{D}^*}$  pour  $j > \delta_p$  est négligeable (ici  $\delta_p \leq d_p$ , linéaire en  $p$ ).
- ▶ D'autre part,
  - ▷ on étend des versions tronquées (*cut-off*) des  $\frac{(2\pi(p-1)!)^{1/2}}{\ell^{(p-1)/2}} z^\ell$ ,  $\ell \leq \delta_p$ , à  $\Sigma$ ;
  - ▷ on les corrige en une famille orthonormalisée de sections holomorphes, de laquelle on déduit  $B_p^\Sigma$  à une erreur négligeable près.
- ▶ On établit les estimées (à l'ordre 0) sur  $B_p^{\mathbb{D}^*} / B_p^\Sigma$  en comparant les  $\delta_p$  premières sections de chaque côté, ce qui est possible grâce au (à une version à deux variables du) Théorème 1.
- ▶ Les estimées d'ordre supérieur sont prouvées de manière similaire, en jouant également sur les paramètres  $c$ ,  $A$  et  $\delta_p$ . □